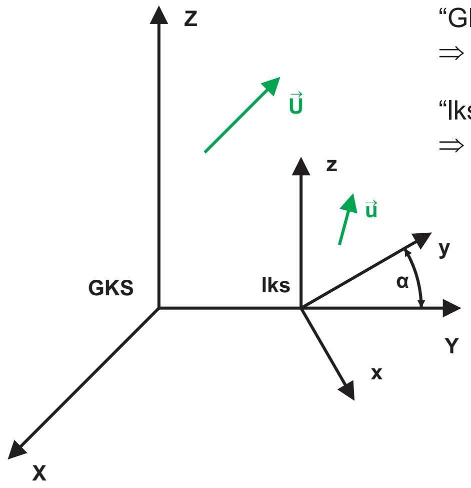
Finite Elemente Methode → Kraft-Ansatz

Koordinatensysteme:



"GKS" = GLOBALES KOORDINATENSYSTEM
⇒ GROSSBUCHSTABEN

"lks" = lokales koordinatensystem
⇒ kleinbuchstaben

X, Y, Z = KOORDINATEN
U = VERSCHIEBUNG
K = STEIFIGKEIT
F = ELEMENTKRAFT
} Im GKS

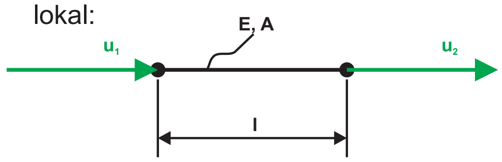
x, y, z = koordinaten
u = verschiebung
k = steifigkeit
f = elementkraft
} im lks

→ Herleitung des FE-Formalismus am Beispiel eines zweidimensionalen Stabes in einem Fachwerk mit insgesamt 3 Knoten

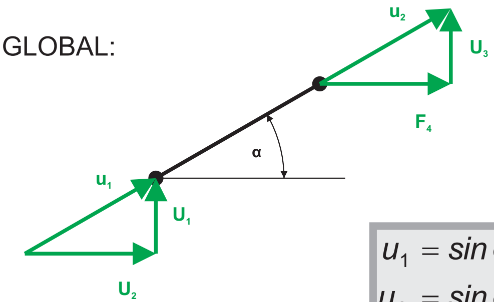
Koordinaten-Transformation:

Verschiebungen (2D-Stab):

lokal:



GLOBAL:



$$u_1 = \sin\alpha \cdot U_1 + \cos\alpha \cdot U_2$$
$$u_2 = \sin\alpha \cdot U_3 + \cos\alpha \cdot U_4$$

Transformation der Verschiebungen:

$$[\sin\alpha] \rightarrow "s" \qquad [\cos\alpha] \rightarrow "c"$$

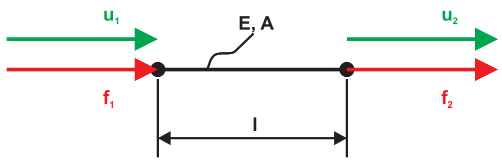
$$\Rightarrow \vec{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{bmatrix} = [T] \cdot \vec{U}$$

Allgemein ("e" = Element):

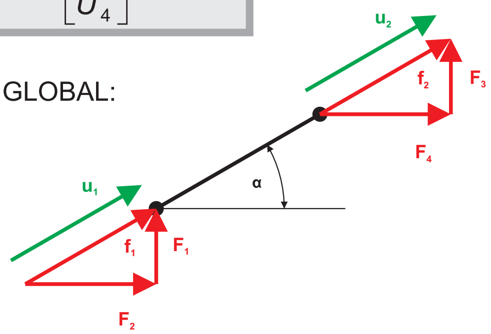
$$\vec{u}_e = [T]_e \cdot \vec{U}_e$$

Elementkräfte (2D-Stab):

lokal:



GLOBAL:



$$F_1 = f_1 \sin\alpha$$
$$F_2 = f_1 \cos\alpha$$
$$F_3 = f_2 \sin\alpha$$
$$F_4 = f_2 \cos\alpha$$

Transformation der Elementkräfte:

$$\vec{F}_e = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \end{bmatrix}_e = \begin{bmatrix} s & 0 \\ c & 0 \\ 0 & s \\ 0 & c \end{bmatrix}_e \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix}_e$$

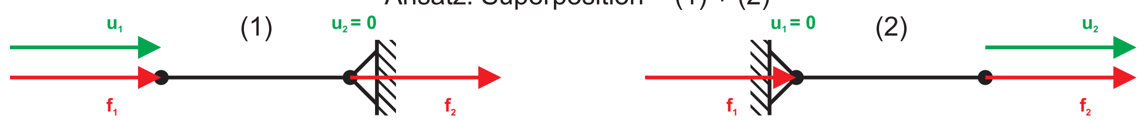
$$[T] = \begin{bmatrix} s & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s & c \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} s & 0 \\ c & 0 \\ 0 & s \\ 0 & c \end{bmatrix} = [T]^T$$

Allgemein:

$$\vec{F}_e = [T]_e^T \cdot \vec{f}_e$$

Steifigkeit (2D-Stab):

Ansatz: Superposition = (1) + (2)



$$\Rightarrow f_1 = \left(\frac{E \cdot A}{l} u_1\right) + \left(-\frac{E \cdot A}{l} u_2\right)$$
$$\Rightarrow f_2 = \left(-\frac{E \cdot A}{l} u_1\right) + \left(\frac{E \cdot A}{l} u_2\right)$$

$$\Rightarrow \vec{f} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & -\frac{EA}{l} \\ -\frac{EA}{l} & \frac{EA}{l} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = [k] \cdot \vec{u}$$

Allgemein:

$$\vec{f}_e = k_e \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \vec{u}_e = [k]_e \cdot \vec{u}$$

Steifigkeitsmatrix des Gesamtsystems:

$$\vec{F}_e = [T]_e^T \cdot \vec{f}_e$$

$$\vec{f}_e = [k]_e \cdot \vec{u}_e$$

$$\vec{u}_e = [T]_e \cdot \vec{U}_e$$

Einsetzen:

$$\Rightarrow \vec{F}_e = [T]_e^T \cdot [k]_e \cdot [T]_e \cdot \vec{U}_e$$

Elementsteifigkeitsmatrix im GKS:

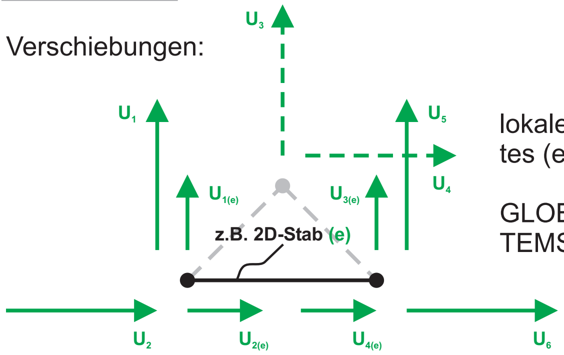
$$\left[[T]_e^T \cdot [k]_e \cdot [T]_e \right] \underset{def}{=} [K]_e$$

Ergebnis:

$$\Rightarrow \vec{F}_e = [K]_e \cdot \vec{U}_e$$

Übergang von lokalen indizierungen auf GLOBALES GESAMTSYSTEM:

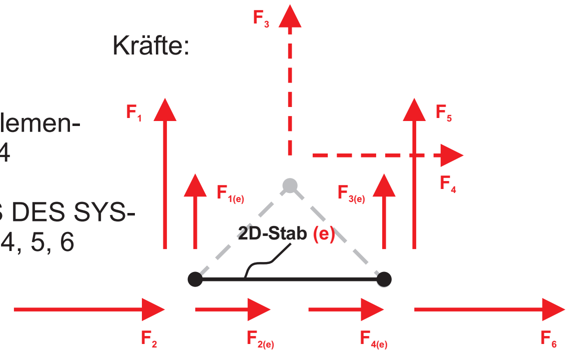
Verschiebungen:



lokale indizes des elementes (e): z.B. 1, 2, 3, 4

GLOBALE INDIZES DES SYSTEMS: Z.B. 1, 2, 3, 4, 5, 6

Kräfte:



Koinzidenz-Transformation:

$$\begin{bmatrix} U_{1(e)} \\ U_{2(e)} \\ U_{3(e)} \\ U_{4(e)} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{[\tilde{T}]_{(e)}} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \\ U_6 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \\ F_5 \\ F_6 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{[\tilde{T}]_{(e)}^T} \begin{bmatrix} F_{1(e)} \\ F_{2(e)} \\ F_{3(e)} \\ F_{4(e)} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \vec{F}_E = \left[\tilde{T}\right]_{(e)}^T \cdot \vec{F}_e$$

$$\Rightarrow \vec{U}_e = \left[\tilde{T}\right]_{(e)} \cdot \vec{U}_E$$

Mit: $\vec{F}_e = [K]_e \cdot \vec{U}_e$

Einsetzen:

$$\Rightarrow \vec{F}_E = \left[\tilde{T}\right]_{(e)}^T \cdot [K]_e \cdot \left[\tilde{T}\right]_{(e)} \cdot \vec{U}_E$$

ERGEBNIS:

$$\Rightarrow \vec{F} = \sum_E \left\{ \left[\tilde{T}\right]_{(e)}^T \cdot [T]_e^T \cdot [k]_e \cdot [T]_e \cdot \left[\tilde{T}\right]_{(e)} \right\} \cdot \vec{U}$$

Für Systeme mit 2 Freiheitsgraden (X und Y):

Vektorgleichung liefert Lösung:

$$\vec{F} = [K] \cdot \vec{U}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} F_X \\ F_Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{XX} & K_{XY} \\ K_{YX} & K_{YY} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_X \\ U_Y \end{bmatrix}$$

LÖSUNGS-GLEICHUNGS-SYSTEM:

$$F_X = K_{XX} \cdot U_X + K_{XY} \cdot U_Y$$

$$F_Y = K_{YX} \cdot U_X + K_{YY} \cdot U_Y$$

Kochrezept für Stab-Fachwerke:

1.) **Datentabelle mit folgenden Spalten erstellen:**
   - *Element-Nummer (Stab)*
   - *Erste Knoten-Nummer des Elements (Stabende A)*
   - *Zweite Knoten-Nummer des Elements (Stabende B)*
   - *Winkellage α des Elements zu GEMEINSAMER Nulllage von Knoten mit NIEDRIGSTEM Index aus gemessen*
   - *Sinus α (VORZEICHEN beachten!) als Faktor aus Wurzelwerten bzw. Brüchen*
   - *Cosinus α (VORZEICHEN beachten!) als Faktor aus Wurzelwerten bzw. Brüchen*
   - *Länge l (als Vielfaches einer EINHEITSLÄNGE, enthält also evtl. wieder Winkelfunktion) in Form eines Faktors wie Sinus und Cosinus*

2.) **Elementsteifigkeit bestimmen:**
Steifigkeitsfaktoren der k-Matrizen durch Längenfaktoren entsprechend Tabelle dividieren

3.) **Koordinaten-Transformation durchführen:**
Sinus- und Cosinus-Faktoren aus Tabelle in Verschiebungsmatrizen (s-c-Matrizen) einsetzen, dabei gemeinsame Faktoren NICHT AUSKLAMMERN!

4.) **Steifigkeitsmatrizen der Einzelstäbe bestimmen:**
Zweimal hintereinander Matrizenmultiplikation (transponierte Verschiebungsmatrizen MAL k-Matrizen MAL Verschiebungsmatrizen) durchführen. REIHENFOLGE KEINESFALLS VERTAUSCHEN!

5.) **Koinzidenz-Transformation durchführen:**
Für jeden Knoten feststellen, welche Verschiebung im GLOBALEN KOORDINATENSYSTEM einer (möglichen) Verschiebung des Elementknotens entspricht und für jede Entsprechung den zugehörigen Koinzidenz-Faktor (wenn Verschiebungen die gleiche Richtung haben: „1“) an die richtige Position der Matrix eintragen. Alle übrigen Positionen mit „0“ auffüllen.

6.) **Matrizen der Elementsteifigkeiten im Gesamtsystem berechnen:**
Wieder zweimal hintereinander in richtiger REIHENFOLGE multiplizieren: transponierte Koinzidenz-Matrizen MAL Einzel-Steifigkeitsmatrizen MAL Koinzidenz-Matrizen.

7.) **Gesamtsteifigkeitsmatrix ermitteln:**
Alle Elementmatrizen unter Berücksichtigung der Steifigkeitsfaktoren (Stablänge!) zusammenaddieren. Positionsweise, Schritt für Schritt vorgehen! Wie ALLE anderen Steifigkeitsmatrizen des Stabsystems muss auch diese Matrix SYMMETRISCH zur HAUPTDIAGONALE sein!

8.) **Überflüssige Zeilen und Spalten streichen:**
Zeilen- UND Spaltenindizes (Symmetrie!) entsprechen den Knoten-Nummern der Elemente. Für Richtungen, in denen auf Grund der Lagerbedingungen des Knotens keine Verschiebungen möglich sind (d.h. kein Freiheitsgrad vorhanden ist), können die jeweiligen Zeilen UND Spalten (Symmetrie!) gestrichen werden. Ergebnis ist die Steifigkeitsmatrix des Gesamtsystems in konzentrierter Form.

9.) **Gesuchte Verschiebungen bzw. Kräfte berechnen:**
Steifigkeitsmatrix in Vektorgleichung einsetzen und Gleichungssystem lösen