Die Involutfunktion

Inhalt

Grundlagen

Die sogenannte Evolventenfunktion, oder kurz: „Involutfunktion“, wird benötigt, um bei Abweichung des tatsächlichen Achsabstandes a zweier Zahnräder vom theoretischen Achsabstand a_d die sich ergebende Profilverschiebung x mit Hilfe des Betriebseingriffswinkels α_w zu berechnen.

Es ist: $\operatorname{inv}\alpha = \tan\alpha - \hat{\alpha}$, wobei $\hat{\alpha} = \frac{\alpha \cdot \pi}{180°}$, also den Winkel im Bogenmaß darstellt.

Daraus wird: $$x_1 + x_2 = \frac{\operatorname{inv}\alpha_w - \operatorname{inv}\alpha}{2\tan\alpha} \cdot (z_1 + z_2)$$

Mit der Involutfunktion ist es auch möglich, für einen beliebigen Durchmesser d_y innerhalb des Zahnprofils unter Zuhilfenahme des Profilwinkels α_y an dieser Stelle die vorhandene Zahndicke s_y zu ermitteln:

$$s_y = d_y \cdot (\Psi_i + \operatorname{inv}\alpha - \operatorname{inv}\alpha_y) \quad \text{mit:} \quad \Psi_i = \frac{\pi + 4x_i \cdot \tan\alpha}{2z_i}$$

Häufig muss jedoch der Betriebseingriffswinkel und damit der sich ergebende Achsabstand aus einer vorgegebenen Profilverschiebung – z.B. zur Vermeidung von Unterschnitt – errechnet werden (Involut rekursiv). Da die Involutfunktion aber nun eine transzendente Funktion ist, kann nicht einfach nach dem Winkel umgestellt werden, sondern es muss ein Näherungsverfahren zur Anwendung kommen. In den folgenden Ausführungen ist dies das Newtonsche Näherungsverfahren, bei dem vom erhaltenen Näherungswert iterativ der Quotient aus der Funktion (zur Berechnung der Nullstelle!) und ihrer Ableitung abgezogen wird:

$$\hat{\alpha}_{n+1} = \hat{\alpha}_n - \frac{\tan\alpha_n - \hat{\alpha}_n - \operatorname{inv}\alpha}{\tan^2\alpha_n}$$

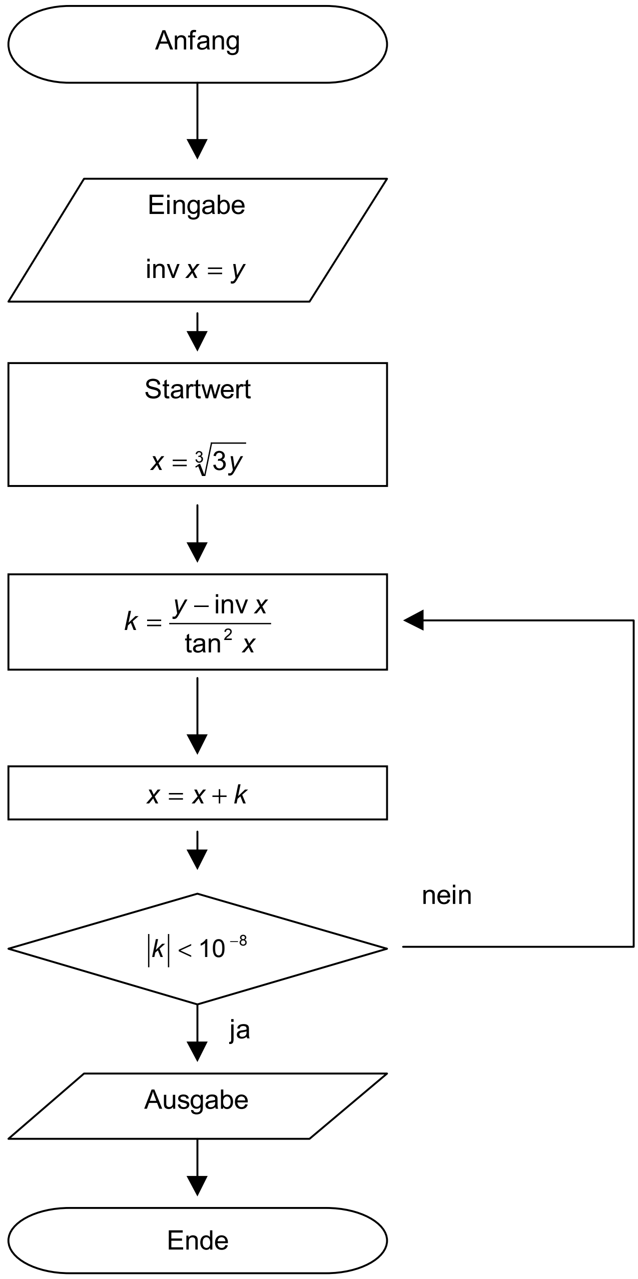
Zweckmäßigerweise verwendet man hierzu ein Rechenprogramm, wobei innerhalb einer Programmschleife die Berechnung in einem Schritt (wie oben) oder in zwei Schritten (Quotientbildung, Summierung) erfolgen kann. Weil es sich bekanntermaßen nur um kleine Winkel ($\alpha < 30°$) handelt, kann mit folgender Formel ein sehr guter Startwert berechnet werden, der meistens schon nach drei Schleifendurchläufen ein auf zehn Kommastellen genaues Endergebnis zur Folge hat:

$$\hat{\alpha}_0 = \sqrt[3]{3\operatorname{inv}\alpha}$$

Am Ende dieses Artikels wird noch erläutert, wie man mit ein paar Tricks auch einen handelsüblichen, eigentlich nicht programmierbaren, Taschenrechner zur Berechnung des Winkels mit dem Newtonschen Näherungsverfahren einsetzen kann.

Basic-Programm

Programm-Ablaufplan Involut rekursiv



Programm Involut rekursiv

```
100	REM INVOLUTFUNKTION
110	INPUT „INV X =“ ; Y
120	X = (3 * Y) ^ (1 / 3)
130	U = X * 180 / π
140	A = TAN U
150	K = (Y – A + X) / A / A
160	X = X + K
170	IF ABS K > 1E-8 GOTO 130
180	U = X * 180 / π
190	U = INT (10000 * U + 0,5) / 10000
200	PRINT „X IN GRAD =“ ; U
210	END
```

Programme für CASIO *fx-7400G PLUS*

Taschenrechner auf Grad („DEG“) einstellen!

Diese Programme funktionieren sicher auch auf ähnlichen programmierbaren Taschenrechnern von Casio. Je nach Display-Breite kann der automatische Zeilenumbruch an einer anderen Stelle erfolgen, dies hat auf den Ablauf keinen Einfluss.

Involutfunktion

INV X

```
„X IN GRAD =“?→A↵
(A ⌟180xπ)→X↵
(tan A–X)→Y↵
„INV X =“↵
Y
```

Involut rekursiv

RE–INV X

```
„INV X =“?→Y↵
(3 *√(3Y))→X↵
Do↵
(Xx180 ⌟π)→A↵
(X– (tan A–X–Y) ÷ (tan A)²)→X↵
(Xx180 ⌟π)→A↵
(tan A–X–Y)→Z↵
LpWhile Z>E-10↵
„X IN GRAD =“↵
A
```

(Code als Text)

Involutfunktion

INV X

```
„X IN GRAD =“?→A↵
(A ⌟180xπ)→X↵
(tan A–X)→Y↵
„INV X =“↵
Y
```

Involut rekursiv

RE–INV X

```
„INV X =“?→Y↵
(3 *√(3Y))→X↵
Do↵
(Xx180 ⌟π)→A↵
(X– (tan A–X–Y) ÷ (tan A)²)→X↵
(Xx180 ⌟π)→A↵
(tan A–X–Y)→Z↵
LpWhile Z>E-10↵
„X IN GRAD =“↵
A
```


(Code als Pixel-Grafik)

ACHTUNG: Nach dem Kopieren und Einfügen muss der Programm-Code genauso aussehen, wie rechts in der Grafik!

Manuelle Iteration (Newtonverfahren) mit dem Taschenrechner

Voraussetzung für eine sinnvolle Anwendung des Verfahrens ist ein Taschenrechner, der mindestens folgende Bedingungen erfüllt:

- Er muss mindestens 1, besser 2 Variablenspeicher besitzen.

- Mehrere Rechenoperationen müssen in einem Rechengang – wiederholt – ausgeführt werden können. In der Regel erkennt man das daran, dass die auszuführenden Operationen dann in einer oder mehreren Zeile(n) des Displays angezeigt werden und editiert werden können.

- Das Zuweisen des Rechenergebnisses in den Variablenspeicher darf, wenn es nicht in den Rechengang integriert werden kann, nicht als eigenständiger Rechengang ausgeführt werden, der dann die vorher eingegebenen Rechenoperationen aus dem Speicher löschen würde.

Ein Taschenrechner, der diese 3 Bedingungen erfüllt, ist der CASIO *fx-350WA*, anhand dessen die Vorgehensweise hier beispielhaft beschrieben werden soll:

1. invα gemäß Vorgabe berechnen (= Ausgangswert)

2. Ergebnis der Variable B zuweisen: „**STO**“ dann „**B**“

3. Taschenrechner auf „RAD“ umstellen: 2x „**MODE**“ dann „**2**“ drücken

4. Startwert berechnen: „**$\sqrt[3]{(3B)}$**“ im Display dann „**=**“

5. Ergebnis der Variable A zuweisen: „**STO**“ dann „**A**“

6. erste Näherung berechnen: „**A– (tan A–A–B) ÷ (tan A)^2** “ im Display zur Anzeige bringen, dann „**=**“ drücken

7. Ergebnis wieder der Variable A zuweisen: „**STO**“ dann „**A**“

8. Schritte **6.** und **7.** nacheinander so oft wiederholen, bis sich das Ergebnis im Display nicht mehr ändert (meistens schon nach 3 Durchläufen)

9. Ergebnis in Grad umrechnen: „**180A ⌟ π**“ im Display, dann „**=**“

10. Der gesuchte Winkel wird angezeigt!