Allgemeine harmonische Schwingung

$x(t) = A \cdot \sin(\omega \cdot t) + B \cdot \cos(\omega \cdot t) \qquad x(t) = C \cdot \sin(\omega \cdot t + \alpha)$

A, B = Amplitude

C = Amplitude (>0)
α = Nullphasenwinkel

$\omega = \frac{2 \cdot \pi}{T} = 2 \cdot \pi \cdot f$ $\qquad$ ω = Kreisfrequenz

Umrechnung zwischen beiden Darstellungen:

$C = \sqrt{A^2 + B^2} \qquad \tan\alpha = \frac{B}{A} \qquad \begin{array}{c} A = C \cdot \cos\alpha \\ B = C \cdot \sin\alpha \end{array}$

D'Alembertsche Ausdrücke (Kräfte)

Translation

$m \cdot \ddot{x}$

Rotation um Schwerpunkt

$J_S \cdot \ddot{\varphi}$

Rotation um Punkt A im Abstand a vom Schwerpunkt (S) und Rotation um Schwerpunkt

$J_A \cdot \ddot{\varphi} = (J_S + m \cdot a^2) \cdot \ddot{\varphi}$

gilt für Momentengleichgewicht

Für Schwerpunktsätze gilt

$J_S \cdot \ddot{\varphi} \qquad m \cdot a \cdot \ddot{\varphi} \qquad m \cdot a \cdot \dot{\varphi}^2$

Rotation, Tangentialkraft (in S in Richtung Bahn), Zentripetalkraft (in S nach außen)

Allgemeine Kräfte

Gewichtskraft

$F=m\cdot g$

Normalkraft

N

Reibungskraft

allg. R oder

$F_{Gl.\,R.}=\mu\cdot N$

Federkraft

$F_F=c\cdot x$

Linearisierung

Nichtlineare Funktionen in Potenzreihen entwickeln. In DGL werden quadr. und höhere Terme der Bewegungskoordinaten und ihrer Ableitungen vernachlässigt !

Bsp.: aus $\varphi \to 0$ folgt:

$$\sin\varphi \to \varphi;\quad \cos\varphi \to 1;\quad \tan\varphi \to \varphi;\quad \varphi^2 \to 0;\quad \dot{\varphi}\cdot\varphi \to 0;\quad \ddot{\varphi}\cdot\varphi \to 0;\quad \dot{\varphi}^2 \to 0;\quad \ddot{\varphi}^2 \to 0;\quad \varphi^3 \to 0$$

Freie ungedämpfte Schwingungen

DGL:

$$\ddot{x}+\omega_0^2\cdot x=0 \qquad \omega_0^2=\frac{c}{m}$$

Allgemeine Lösung:

$$x(t)=C_1\cdot\sin(\omega_0\cdot t)+C_2\cdot\cos(\omega_0\cdot t)$$

oder

$$x(t)=X\cdot\sin(\omega_0\cdot t+\alpha)$$

ω_0 = Eigenkreisfrequenz

Sonderfall (math. Pendel):

$$\ddot{\varphi} + \left[2 \cdot \frac{c \cdot a^2}{m \cdot l^2} - \frac{g}{l}\right] \cdot \varphi = 0$$

Das Vorzeichen in der eckigen Klammer entscheidet über Lösungsverhalten !

Fall a)

$$\left[2 \cdot \frac{c \cdot a^2}{m \cdot l^2} - \frac{g}{l}\right] < 0 \quad \textit{wobei} \quad \left[-2 \cdot \frac{c \cdot a^2}{m \cdot l^2} + \frac{g}{l}\right] = \eta^2 > 0$$

DGL: $\ddot{\varphi} - \eta^2 \cdot \varphi = 0$

Allgemeine Lösung:

$$\varphi(t) = C_1 \cdot e^{\eta \cdot t} + C_2 \cdot e^{-\eta \cdot t}$$

Ergebnis: Keine Schwingung ! φ wächst ständig !

Fall b)

$$\left[2 \cdot \frac{c \cdot a^2}{m \cdot l^2} - \frac{g}{l}\right] > 0 \quad \textit{wobei} \quad \left[2 \cdot \frac{c \cdot a^2}{m \cdot l^2} - \frac{g}{l}\right] = \omega_0^2 > 0$$

DGL: $\ddot{\varphi} + \omega_0^2 \cdot \varphi = 0$

Allgemeine Lösung:

$$\varphi(t) = A \cdot \cos(\omega_0 \cdot t) + B \cdot \sin(\omega_0 \cdot t)$$

Ergebnis: Harmonische Schwingung !

Fall c)

$$\left[2 \cdot \frac{c \cdot a^2}{m \cdot l^2} - \frac{g}{l}\right] = 0$$

DGL: $\ddot{\varphi} = 0$

Allgemeine Lösung:

$$\varphi(t) = konst.$$

Ergebnis: Bleibt in ausgelenkter Lage stehen !

<u>Federschaltungen</u>

Parallel (gleiche Auslenkung x für beide Federn)

$$c_{ges} = \sum_i c_i$$

Hintereinanderschaltung (beide Federn erfahren gleiche Kraft)

$$\frac{1}{c_{ges}} = \sum_i \frac{1}{c_i}$$

Anm.: Bei Drehschwingungen Vereinfachung: Bogen in Tangente und Winkel beibehalten

Freie gedämpfte Schwingungen

<u>DGL:</u>

$$\ddot{x} + 2 \cdot \delta \cdot \dot{x} + \omega_0^2 \cdot x = 0$$

Lösung:

$$x(t) = A_1 \cdot e^{\lambda_1 \cdot t} + A_2 \cdot e^{\lambda_2 \cdot t}$$

wobei

$$\lambda_{1,2} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}$$

<u>Fallunterscheidungen</u>

1. Starke Dämpfung

$$\delta^2 > \omega_0^2 \qquad \lambda_{1,2} < 0$$

Lösung: reelle, abklingende Exponentialfunktion (Kriechbewegung !!!)

$$x(t) = A_1 \cdot \cdot e^{\left(-\delta - \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}\right) \cdot t} + A_2 \cdot e^{\left(-\delta + \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}\right) \cdot t}$$

2. Aperiodischer Grenzfall

$$\delta^2 = \omega_0^2 \qquad \lambda_{1,2} = -\delta < 0$$

Lösung: reelle, abklingende Exponentialfunktion (Kriechbewegung !)

$$x(t) = (A_1 + A_2 \cdot t) \cdot e^{-\delta \cdot t}$$

3. Gedämpfte Schwingung

$\delta^2 < \omega_0^2 \qquad \lambda_{1,2} = -\delta \pm i \cdot \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$

$$x(t) = e^{-\delta \cdot t} \cdot \left(A_1 \cdot e^{i \cdot \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} \cdot t} + A_2 \cdot e^{-i \cdot \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} \cdot t} \right)$$

$c_1 = A_1 + A_2 \qquad c_2 = i \cdot (A_1 - A_2)$

$$x(t) = e^{-\delta \cdot t} \cdot \left(c_1 \cdot \cos\left(\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} \right) \cdot t + c_2 \cdot \sin\left(\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} \right) \cdot t \right)$$

$$x(t) = X \cdot e^{-\delta \cdot t} \cdot \sin\left(\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} \cdot t + \alpha \right)$$

Amplitude Phase

$\tan\alpha = \dfrac{c_1}{c_2} \qquad X = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}$

<u>Gedämpfte Eigenkreisfrequenz</u>; Schwingungsdauer

$$\upsilon_0 = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} \qquad T = \frac{2 \cdot \pi}{\upsilon_0} = \frac{2 \cdot \pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}}$$

<u>Logarithmisches Dekrement</u>

$$\ln \frac{x(t)}{x(t+T)} = \delta \cdot T = \Lambda$$

<u>Lehrsches Dämpfungsmaß</u>

$$D = \frac{\delta}{\omega_0} \qquad \Lambda \approx 2 \cdot \pi \cdot D$$

Reibungsdämpfung

DGL bei Auslenkung in +x Richtung

$$\ddot{x} + \frac{c}{m} \cdot x = -\frac{R}{m}$$

DGL bei Auslenkung in -x Richtung

$$\ddot{x} + \frac{c}{m} \cdot x = \frac{R}{m}$$

Vollständige Lösung: $x=x_h+x_p$

$$x_h = C_2 \cdot \sin(\omega_0 \cdot t) + C_1 \cdot \cos(\omega_0 \cdot t)$$

$$x_p = \pm \frac{R}{m \cdot \omega_0^2} = \mp \frac{R}{c}$$

Lösung bei Auslenkung in +x Richtung

$$x = C_2^+ \cdot \sin(\omega_0 \cdot t) + C_1^+ \cdot \cos(\omega_0 \cdot t) - \frac{R}{c}$$

Lösung bei Auslenkung in -x Richtung

$$x = C_2^- \cdot \sin(\omega_0 \cdot t) + C_1^- \cdot \cos(\omega_0 \cdot t) + \frac{R}{c}$$

Erzwungene Schwingungen

DGL: $m \cdot \ddot{x} + k \cdot \dot{x} + c \cdot x = P(t)$

Ungedämpfte erzwungene Schwingung

$$m \cdot \ddot{x} + c \cdot x = P_0 \cdot \sin(\omega \cdot t)$$

Lösung: $x(t) = \frac{P_0}{m} \cdot \left| \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2} \right| \cdot \sin(\omega \cdot t - \varepsilon)$

Gedämpfte erzwungene Schwingung

$$\ddot{x} + \frac{k}{m} \cdot \dot{x} + \frac{c}{m} \cdot x = \frac{P_0}{m} \cdot \sin(\omega \cdot t)$$

Abkürzungen:

$$\frac{k}{m} = 2 \cdot \delta = 2 \cdot D \cdot \omega_0 \qquad \frac{c}{m} = \omega_0^2 \qquad \frac{P_0}{m} = p \qquad \eta = \frac{\omega}{\omega_0}$$

Amplitude:

$$X = \frac{p}{\omega_0^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{\left(1-\eta^2\right)^2 + \left(2 \cdot D \cdot \eta\right)^2}}$$

Phase: $\tan\varepsilon = \dfrac{2 \cdot D \cdot \eta}{1-\eta^2}$

Resonanzamplitude: $X_R = \dfrac{p}{\omega_0^2} \cdot \dfrac{1}{2 \cdot D \cdot \sqrt{1-D^2}}$

<u>Gedämpfte, durch Unwucht erzwungene Schwingung</u>

$$\ddot{x} + \frac{k}{m_0 + m_u} \cdot \dot{x} + \frac{c}{m_0 + m_u} \cdot x = \frac{m_u \cdot r \cdot \omega^2}{m_0 + m_u} \cdot \sin(\omega \cdot t)$$

Amplitude: $X = \dfrac{m_u \cdot r}{m_0 + m_u} \cdot \dfrac{\eta^2}{\sqrt{\left(1-\eta^2\right)^2 + \left(2 \cdot D \cdot \eta\right)^2}}$

Phase: $\tan\varepsilon = \dfrac{2 \cdot D \cdot \eta}{1-\eta^2}$

Resonanz: $\omega_R = \dfrac{\omega_0}{\sqrt{1 - 2 \cdot D^2}}$ $\qquad X_R = \dfrac{\frac{m_u}{m_0 + m_u} \cdot r}{2 \cdot D \cdot \sqrt{1-D^2}}$

<u>Gedämpfte, durch Fußpunkterregung erzwungene Schwingung</u>

$$\ddot{x} + \frac{k}{m} \cdot \dot{x} + \frac{c}{m} \cdot x = \frac{s_0}{m} \cdot \sqrt{c^2 + k^2 \cdot \omega^2} \cdot \sin(\omega \cdot t + \psi)$$

Amplitude: $X = s_0 \cdot \sqrt{\dfrac{1 + \left(2 \cdot D \cdot \eta\right)^2}{\left(1-\eta^2\right)^2 + \left(2 \cdot D \cdot \eta\right)^2}}$

Phase: $\tan\gamma = \dfrac{2 \cdot D \cdot \eta^3}{1 - \eta^2 \cdot \left(1 - 4 \cdot D^2\right)}$

<u>Relativbewegung der gedämpften, durch Fußpunkterregung erzwungenen Schwingung</u>

$$\ddot{x}_R + \frac{k}{m} \cdot \dot{x}_R + \frac{c}{m} \cdot x_R = s_0 \cdot \omega^2 \cdot \sin(\omega \cdot t)$$

Amplitude:

$$X_R = s_0 \cdot \frac{\eta^2}{\sqrt{\left(1-\eta^2\right)^2 + \left(2 \cdot D \cdot \eta\right)^2}}$$

Systeme mit mehreren Freiheitsgraden

Freie Schwingungen, Systeme mit 2 Freiheitsgraden (Schwinger mit 2 Massen)

Bewegungsgleichung

$$m_2 \cdot \ddot{x}_2 + c_2 \cdot x_2 - c_2 \cdot x_1 = 0 \quad m_1 \cdot \ddot{x}_1 + (c_1 + c_2) \cdot x_1 - c_2 \cdot x_2 = 0$$

Lösungsansatz:

$$x_1 = A \cdot \cos(\omega \cdot t) \qquad x_2 = B \cdot \cos(\omega \cdot t)$$

eingesetzt in Bewegungsgleichung ergibt:

$$-c_2 \cdot A + (c_2 - m_2 \cdot \omega^2) \cdot B = 0$$

$$(c_1 + c_2 - m_1 \cdot \omega^2) \cdot A - c_2 \cdot B = 0 \qquad \text{(II)}$$

Charakteristische Gleichung folgt aus Bedingung: Koeffizientendeterminante = 0

$$(c_1 + c_2 - m_1 \cdot \omega^2) \cdot (c_2 - m_2 \cdot \omega^2) - (-c_2) \cdot (-c_2) = 0$$

Damit folgt quadratische Gleichung für ω^2:

$$\omega^4 - \left(\frac{c_2}{m_2} + \frac{c_1}{m_1} + \frac{c_2}{m_1}\right) \cdot \omega^2 + \frac{c_1 \cdot c_2}{m_1 \cdot m_2} = 0$$

Lösungen der quadratischen Gleichung für ω^2:

$$\omega_{1/2}^2 = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{c_2}{m_2} + \frac{c_1}{m_1} + \frac{c_2}{m_1}\right) \pm \sqrt{\frac{1}{4} \cdot \left(\frac{c_2}{m_2} + \frac{c_1}{m_1} + \frac{c_2}{m_1}\right)^2 - \frac{c_1 \cdot c_2}{m_1 \cdot m_2}}$$

Lösungen von ω^2 in (II) einsetzen liefert Amplitudenverhältnisse:

$$\frac{B_1}{A_1} = \frac{c_1 + c_2 - m_1 \cdot \omega_1^2}{c_2} = \mu_1 \qquad \frac{B_2}{A_2} = \frac{c_1 + c_2 - m_1 \cdot \omega_2^2}{c_2} = \mu_2$$

Weitere Lösungen der Bewegungsgleichungen durch folgenden Ansatz (selbe Rechnung wie oben):

$$x_1 = D \cdot \sin(\omega \cdot t) \qquad x_2 = C \cdot \sin(\omega \cdot t)$$

Damit ergibt sich folgende allgemeine Lösung:

$$x_2 = \mu_1 \cdot A_1 \cdot \cos(\omega_1 \cdot t) + \mu_1 \cdot D_1 \cdot \sin(\omega_1 \cdot t) + \mu_2 \cdot A_2 \cdot \cos(\omega_2 \cdot t) + \mu_2 \cdot D_2 \cdot \sin(\omega_2 \cdot t)$$

$$x_1 = A_1 \cdot \cos(\omega_1 \cdot t) + D_1 \cdot \sin(\omega_1 \cdot t) + A_2 \cdot \cos(\omega_2 \cdot t) + D_2 \cdot \sin(\omega_2 \cdot t)$$

A_1, A_2, D_1, D_2 sind Integrationskonstanten, zu bestimmen aus Anfangsbedingungen
Bei passender Wahl der Anfangsbedingungen schwingen beide Massen
nur mit ω_1 (D_1=A_2=D_2=0 muss erfüllt sein) bzw. ω_2 (A_1=D_1=D_2=0 muss erfüllt sein).
Dies sind dann die Hauptschwingungen.

Systeme mit n Freiheitsgraden

1. Bewegungsgleichungen aufstellen

2. Umschreiben in Matrix folgender Form:

$$M \cdot \ddot{\vec{x}} + K \cdot \vec{x} = 0 \qquad \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & m_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ldots \\ \ddot{x}_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 \\ 0 & a_{32} & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{bmatrix} = 0$$

M = Massenmatrix (Drehmassen)
K = Steifigkeitsmatrix

3. Lösungsansatz

$$\vec{x} = \hat{\vec{x}} \cdot e^{i \cdot \omega \cdot t} \qquad \ddot{\vec{x}} = -\hat{\vec{x}} \cdot \omega^2 \cdot e^{i \cdot \omega \cdot t} = -\omega^2 \cdot \vec{x}$$

einsetzen in $M \cdot \ddot{\vec{x}} + K \cdot \vec{x} = 0$ und kürzen ergibt:

$$(K - \lambda \cdot M) \cdot \vec{x} = 0 \qquad mit \quad \lambda = \omega^2$$

Es existieren nur dann nichttriviale Lösungen, wenn

$$\det(K - \lambda \cdot M) = 0$$

Berechnen der Determinanten liefert charakteristische Gleichung n-ten Grades

Lösung der charakteristische Gleichung n-ten Grades sind n-Eigenwerte

Gleichungen für beliebige 2-Freiheitsgradsysteme

1. Bewegungsgleichungen aufstellen:

$$\ddot{x}_1 + a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 = 0$$
$$\updownarrow \qquad \updownarrow$$
$$\ddot{x}_2 + a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 = 0$$

Auf richtige Zuordnung achten!

2. Umschreiben in Matrix folgender Form:

$$E \cdot \ddot{\vec{x}} + K^* \cdot \vec{x} = 0 \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0$$

Die Einheitsmatrix E erhält man durch Division der Massen bzw. Drehmassen.

3. Lösungsansatz

$$\vec{x} = \hat{\vec{x}} \cdot e^{i \cdot \omega \cdot t} \qquad \ddot{\vec{x}} = -\hat{\vec{x}} \cdot \omega^2 \cdot e^{i \cdot \omega \cdot t} = -\omega^2 \cdot \vec{x}$$

einsetzen in $E \cdot \ddot{\vec{x}} + K^* \cdot \vec{x} = 0$ und kürzen ergibt:

$$(K^* - \lambda \cdot E) \cdot \hat{\vec{x}} = 0 \qquad mit \quad \lambda = \omega^2$$

$$\begin{bmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \end{bmatrix} = 0$$

Es existieren nur dann nichttriviale Lösungen, wenn

$$\det(K - \lambda \cdot E) = 0$$

Daraus folgt die charakteristische Gleichung:

$$\lambda^2 - \lambda \cdot (a_{11} + a_{22}) + a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21} = 0$$

Die Lösung der charakteristische Gleichung liefert die Eigenwerte:

$$\lambda_{1/2} = \frac{a_{11} + a_{22}}{2} \mp \frac{1}{2} \cdot \sqrt{(a_{11} - a_{22})^2 + 4 \cdot a_{12} \cdot a_{21}}$$

Mit Hilfe der Eigenwerte folgen die Resonanzschwingungen:

$$\omega_{1/2} = \sqrt{\lambda_{1/2}}$$

Systeme mit 2 Freiheitgraden, Erzwungene Schwingungen

Bewegungsgleichungen

$$\ddot{x}_1 + a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 = \frac{F_0}{m_1} \cdot \sin\omega \cdot t$$
$$\ddot{x}_2 + a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 = 0$$

Koeffizientendeterminante

$$\Delta(\omega) = (\omega^2 - \omega_1^2) \cdot (\omega^2 - \omega_2^2)$$

$$\Delta(\omega) = (a_{11} - \omega^2) \cdot (a_{22} - \omega^2) - a_{12} \cdot a_{21}$$

Eigenfrequenzen der "freien Schwingungen":

$$\omega_{1/2}^2 = \frac{a_{11} + a_{22}}{2} \mp \frac{1}{2} \cdot \sqrt{(a_{11} - a_{22})^2 + 4 \cdot a_{12} \cdot a_{21}}$$

Zwangsschwingungsamplituden:

$$X_1 = \frac{\frac{F_0}{m_1} \cdot (a_{22} - \omega^2)}{\Delta(\omega)} \qquad X_2 = \frac{\frac{-F_0}{m_1} \cdot a_{21}}{\Delta(\omega)}$$

Tilgung:

$$x_1 \overset{!}{=} 0 \qquad \Rightarrow \qquad a_{12} \cdot x_2 = \frac{F_0}{m_1} \cdot \sin\omega \cdot t$$
$$\Rightarrow \ddot{x}_1 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \ddot{x}_2 + a_{22} \cdot x_2 = 0$$

Tilgerfrequenz:

$$\omega_0^2 = a_{22} \qquad \text{z.B.:}\ \omega_0^2 = \frac{c_2}{m_2}$$

Torsionsschwingungen

Bewegungsgleichung für Drehschwinger mit 1 Masse (gefesseltes System)

$$\ddot{\varphi} + \frac{c_d}{J_S} \cdot \psi = 0 \qquad c_d = \frac{G \cdot \mathrm{I}_t}{l} \qquad \mathrm{I}_t = \mathrm{I}_p = \frac{\pi \cdot d^4}{32}$$

Eigenkreisfrequenz

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{G \cdot \mathrm{I}_t}{l \cdot J_S}} \qquad \omega_1^2 = c_d \cdot \left(\frac{1}{J_1} + \frac{1}{J_2} \right)$$

Berechnung des Schwingungsknoten

$$l_1 = \frac{J_2}{J_1 + J_2} \cdot l$$

Ersatzfederkonstante

$$\frac{1}{c_d} = \sum_i \frac{1}{c_{di}}$$

<u>Neuberscher Grenzwert</u>

$$\omega_2^2 = c_2 \cdot \left(\frac{1}{J_1 + J_2} + \frac{1}{J_3 + J_4 + \ldots + J_n} \right)$$

$$\omega_1^2 = c_1 \cdot \left(\frac{1}{J_1} + \frac{1}{J_2 + J_3 + \ldots + J_n} \right)$$

$$\omega_{n-1}^2 = c_{n-1} \cdot \left(\frac{1}{J_1 + J_2 + \ldots + J_{n-1}} + \frac{1}{J_n} \right)$$

Näherung für niedrigste Torsionseigenfrequenz

$$\omega_{01}^2 > \frac{1}{\frac{1}{\omega_1^2} + \frac{1}{\omega_2^2} + \ldots + \frac{1}{\omega_{n-1}^2}}$$

Reduktion versetzter Getriebe (siehe Blatt 4/1)

$$\frac{J_1^{r(2)}}{J_1^{(1)}} = \left(\frac{r^{(2)}}{r^{(1)}} \right)^2 \Rightarrow J_1^{r(2)} = J_1^{(1)} \left(\frac{r^{(2)}}{r^{(1)}} \right)^2$$

$$\frac{C_1^{r(2)}}{C_1^{(1)}} = \left(\frac{r^{(2)}}{r^{(1)}} \right)^2 \Rightarrow C_1^{r(2)} = C_1^{(1)} \left(\frac{r^{(2)}}{r^{(1)}} \right)^2$$

Biegekritische Drehzahl

1) Welle mit einer Masse:

$$\boxed{\omega_k = \omega_o = \sqrt{\frac{C}{m}} \quad in \frac{1}{s}}$$

$$\boxed{n_k = \frac{30}{\pi}\omega_k = \frac{30}{\pi}\sqrt{\frac{C}{m}} \quad \text{in} \frac{1}{\text{min}}}$$

Bei mehreren kritischen Drehzahlen gilt:

$$\omega_{k1} \leq \omega_{k2} \leq .... \leq \omega_k$$

Die Federsteifigkeit der Welle:

$$\boxed{C = \frac{F}{f_F}}$$

f_F sind aus Gieck, Adam, Dubbel etc zu entnehmen!

Massenzuschlag:

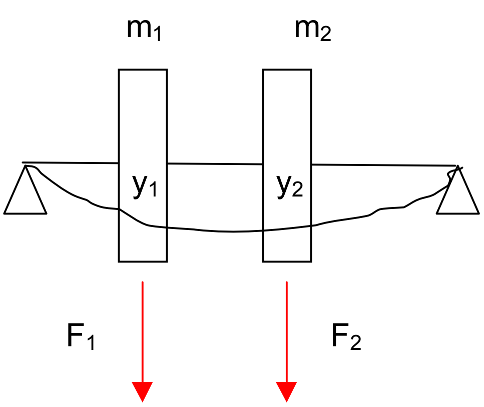
Falls Gewicht der Welle nicht vernachlässigt werden darf, Massenzuschlag nach **Beiblatt MDY-5.1** in Abhängigkeit der Lagerung hinzufügen.

Loslager/Festlager	$m_{Zuschlag} = \frac{m_w}{2}$	in der Mitte zwischen den Lagern
Einseitige Einspannung	$m_{Zuschlag} = \frac{m_w}{3}$	am freien Ende

Masse Welle $\boxed{m_w = V\rho = \frac{\pi}{4} d_w^2 l_w \rho}$

Näheres siehe **Beiblatt MDY-5.1**

2) Welle mit 2 Massen



y_1 Absenkung an der Angriffstelle der Kraft F_1
y_2 Absenkung an der Angriffstelle der Kraft F_2

Die Fliehkräfte sind:

$$F_1 = m_1 y_1 \omega^2 \qquad F_2 = m_2 y_2 \omega^2$$

$$y_1 = \frac{m_1 y_1 \omega^2}{C_{11}} + \frac{m_2 y_2 \omega^2}{C_{12}} \qquad y_2 = \frac{m_1 y_1 \omega^2}{C_{21}} + \frac{m_2 y_2 \omega^2}{C_{22}}$$

$C_{12} = C_{21}$ (Satz von Maxwell-Betty)

$$\boxed{\begin{aligned} & y_1\left(\frac{m_1}{C_{11}} - \frac{1}{\omega^2}\right) + \frac{m_2}{C_{12}} y_2 = 0 \\ & y_1 \frac{m_1}{C_{12}} + y_2\left(\frac{m_2}{C_{22}} - \frac{1}{\omega^2}\right) = 0 \end{aligned}}$$

C_{11} Federsteifigkeit an der 1. Stelle auf Grund der Kraft F_1

C_{12} Federsteifigkeit an der 1. Stelle auf Grund der Kraft F_2

C_{22} Federsteifigkeit an der 2. Stelle auf Grund der Kraft F_2

Für Nichttriviale Lösungen muss Determinante gleich null sein!

$$\Rightarrow \quad \boxed{\left(\frac{1}{\omega^2}\right)^2 - \frac{1}{\omega^2}\left(\frac{m_1}{C_{11}} + \frac{m_2}{C_{22}}\right) - m_1 m_2\left(\frac{1}{C_{21}C_{12}} - \frac{1}{C_{11}C_{22}}\right) = 0}$$

Hieraus lassen sich dann ω_{k1} und ω_{k2} berechnen.

3) Welle mit n-Massen

analog oder nach **Dunkerly** (auch zulässig für nur 2 Massen)

$$\boxed{\frac{1}{\omega_1^2} = \frac{1}{\omega_1'^2} + \frac{1}{\omega_2'^2} + \ldots} \qquad \boxed{\text{mit} \quad \omega_1'^2 = \frac{C_1}{m_1} \quad \omega_2'^2 = \frac{C_2}{m_2}} \quad \text{etc.}$$

Superposition von vielen einzelnen Systemen, die jeweils getrennt betrachtet werden. Dadurch ergibt sich eine Arbeitserleichterung. Das exakte Ergebnis liegt maximal 10% über dem durch Dunkerly abgeschätzten ω_1-Wert.