Kräftegleichungen :

Coulombsche Reibungskraft : $\boxed{F_R = \mu * F_N}$ (Rutschen)

Rollen : $\boxed{\text{Reibungskraft } R}$

Gewichtskraft : $\boxed{G = m * g}$

Seilreibungskraft : $\boxed{F_1 = F_2 * e^{\mu * \alpha}}$

Federkräfte :

Gerade Feder $F_c = c * x$

Drehfeder $F_{cd} = c_d * \varphi$

$$[c] = \frac{N}{m}$$

Dämpfungskraft : $\boxed{F_d = k * \dot{x}}$

$$[k] = \frac{> N * s}{m}$$

Trägheitskräfte : D`Alembert für Translation : $\boxed{F_T = -m * \ddot{x}}$

Rotation : $\boxed{M_T = J * \ddot{\varphi}}$ Drehung um eigene Achse

Wenn Drehmittelpunkt nicht Schwerpunkt ist : $\boxed{J = J_S + m * r^2}$
(Satz von Steiner)

Fliehkraft (Drehmittelpunkt weit außerhalb von Schwerpunkt) :

$$F_z = m * r * \dot{\varphi}^2$$

Bedingungen für Rollen :

$$x = r * \varphi$$
$$\dot{x} = r * \dot{\varphi}$$
$$\ddot{x} = r * \ddot{\varphi}$$

Energie : potentielle Energie :

Lage : $W_{pot} = m * g * h$

Feder : $W = \frac{1}{2} * c * x^2$

Kinetische Energie :

Translation: $W_{kin} = \frac{1}{2} * m * \dot{x}^2$

Rotation: $W_{kin} = \frac{1}{2} * J * \dot{\varphi}^2$

Allgemeine Gleichungen für Schwingungen :

$$\boxed{x(t) = A * \sin(\omega * t) \text{ und } x(t) = B * \cos(\omega * t) \quad \text{mit } \omega = \frac{2 * \pi}{T} = 2 * \pi * f}$$

Andere Form : $\boxed{x(t) = C * \sin(\omega * t + \alpha)}$

Entspricht auch : $\boxed{x(t) = C * \{ \sin(\omega * t) * \cos\alpha + \cos(\omega * t) * \sin\alpha \}}$

Mit : $\boxed{A = c * \cos\alpha \quad \text{und} \quad B = c * \sin\alpha}$

$$\boxed{c = \sqrt{A^2 + B^2} \quad \text{und} \quad \tan\alpha = \frac{B}{A}}$$

Freiheitsgrade = Anzahl der Bewegungsmöglichkeiten

Linearisierung von Differentialgleichungen :

- In Differentialgleichungen werden quadratische und höhere Terme der Bewegungskoordinaten und ihrer Ableitungen vernachlässigt !!!

Beispiel : $\boxed{\varphi^2 = 0}$ $\boxed{\dot{\varphi}^2 = 0}$ $\boxed{\ddot{\varphi}^2 = 0}$ $\boxed{\varphi^3 = 0}$ usw.

Daraus folgt :

$$\boxed{\sin\varphi = \varphi \underbrace{- \frac{\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^5}{5!}}_{=0}} \qquad \boxed{\sin\varphi = \varphi}$$

$$\boxed{\cos\varphi = 1 \underbrace{- \frac{\varphi^2}{2!} + \frac{\varphi^4}{4!}}_{=0}} \qquad \boxed{\cos\varphi = 1}$$

$$\boxed{\tan\varphi = \varphi + \underbrace{\frac{\varphi^3}{3} + \frac{2 * \varphi^5}{15}}_{=0}} \qquad \boxed{\tan\varphi = \varphi}$$

Systeme mit 1 Freiheitsgrad :

Lineares Ein- Massen –Schwinger mit Dämpfung :

Bewegungsgleichung : $\boxed{\underbrace{m*\ddot{x}}_{\text{Trägheit}} + \underbrace{k*\dot{x}}_{\text{Dämpfung}} + \underbrace{c*x}_{\text{Rückstellung des Systems}} = \underbrace{P(t)}_{\text{Erregung}}}$

Freie, ungedämpfte Schwingung :

- P(t)=0 und $k*\dot{x}=0$

Bewegungsgleichung : $\boxed{m*\ddot{x}+c*x=0}$

$\boxed{\ddot{x}+\frac{c}{m}*x=0}$ Oder $\boxed{\ddot{x}+\omega_0^2*x=0}$ mit $\boxed{\frac{c}{m}=\omega_0^2}$

Lösung der Dgl. :

$$\boxed{\begin{aligned} x(t) &= C_1*\sin(\omega_0*t) \\ \dot{x}(t) &= C_1*\omega_0*\cos(\omega_0*t) \\ \ddot{x}(t) &= -C_1*\omega_0^2*\sin(\omega_0*t) \end{aligned}}$$

Allgemeine Lösung von Dgl. 2. Ordnung :

$\boxed{x(t)=C_1*\sin(\omega_0*t)+C_2*\cos(\omega_0*t)}$ (allgemeine harmonische Schwingung)

Bewegungsgleichung : $\boxed{\ddot{\varphi}+[......]*\varphi=0}$ Vorzeichen der eckigen Klammer entscheidet über Lösungsverhalten !!

A) $\boxed{\ddot{\varphi}+[......]*\varphi=0}$: Harmonische Schwingung !!

Lösung : $\boxed{\varphi(t)=A*\cos(\omega_0*t)+B*\sin(\omega_0*t)}$

B) $\boxed{\ddot{\varphi}=0}$, d.h. die eckige Klammer nimmt den Wert 0 ein , dann ist $\boxed{\varphi(t)=\text{const.}}$
bleibt also in ausgelenkter Lage stehen !

C) $\boxed{\ddot{\varphi}-[\eta^2]*\varphi=0}$; d.h. das Vorzeichen der eckigen Klammer ist negativ !

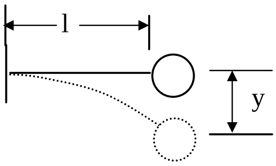
Lösung : Exponentialansatz $\boxed{\varphi(t)=C_1*e^{\eta*t}+C_2*e^{-\eta*t}}$

C_1 und C_2 aus Anfangsbedingungen
Keine Schwingung !!!!!

Federschaltungen :

a) Längsschwingungen

Stabfeder :



$$\boxed{y = \frac{F * l^3}{3 * E * I}} \quad \boxed{F = c * y = \frac{3 * E * I}{l^3} * y} \quad \boxed{\ddot{y} + \frac{c}{m} * y = 0}$$

Zusammengesetzte Federn :

Reihenschaltung	Parallelschaltung
Federkräfte gleich ! $x = x_1 + x_2$ $F = C_1 * x_1$ $F = C_2 * x_2$ $\boxed{\frac{1}{C_{ges}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}}$ $C_{ges} \prec C_1 , C_2$ Feder wird ``weicher ``	**Federwege gleich !** $F = C_1 * x$ $F = C_2 * x$ $\boxed{C_{ges} = C_1 + C_2}$ $C_{ges} \succ C_1, C_2$ Feder wird ``härter ``

Lösung :

In statischer Ruhelage : y = 0
Auslenkung (Bewegung) $y > 0$

Vereinfachung : Bogen Winkel $\delta\text{`} =$ Tangentenwinkel δ

Federkraft = Federvorspannung + Federweg $= F_0 + C * x = C * (x_0 + x)$

B) Drehschwingungen :

- Statische Ruhelage : Feder vorgespannt
- Vorspannung kann Einfluß auf Eigenkreisfrequenz ausüben .

Eigenkreisfrequenz : $\boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{c}{m}}}$

Freie, gedämpfte Schwingungen :

Dgl. : $\boxed{\ddot{x} + \frac{k}{m} * \dot{x} + \frac{c}{m} * x = 0}$

Mit : $\boxed{\frac{k}{m} = 2 * \delta = \text{Abklingkonstante}}$ und $\boxed{\frac{c}{m} = \omega_0^2 = \text{Eigenkreisfrequenz}}$

Dgl. : $\boxed{\ddot{x} + 2 * \delta * \dot{x} + \omega_0^2 * x = 0}$

Lösung der Dgl. mit Exponentialansatz :

$$\boxed{\begin{aligned} x &= A * e^{\lambda * t} \\ \dot{x} &= A * \lambda * e^{\lambda * t} \\ \ddot{x} &= A * \lambda^2 * e^{\lambda * t} \end{aligned}}$$

Eingesetzt in Dgl. : $\boxed{\lambda^2 + 2 * \lambda * \delta + \omega_0^2 = 0}$

$\Rightarrow$ Lösung : $\boxed{\lambda_{1/2} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}}$ (2 Lösungen)

$\Rightarrow$ zu jedem λ gehört eine Lösung der Dgl. : $\boxed{x(t) = A_1 * e^{\lambda_1 * t} + A_2 * e^{\lambda_2 * t}}$

- A_1 und A_2 sind Integrationskonstanten , die aus den Anfangsbedingungen berechnet werden : $\boxed{x(t=0) = x_0 \quad \text{und} \quad \dot{x}(t=0) = v_0}$

Fallunterscheidung :

A) $\boxed{\delta^2 \succ \omega_0^2}$ $\Rightarrow$ starke Dämpfung ! $\Rightarrow \lambda_1 \;,\; \lambda_2 \prec 0 \Rightarrow$ abklingende Exponentialfkt.

Lösung : $\boxed{x(t) = A_1 * e^{\left(-\delta - \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}\right) * t} + A_2 * e^{\left(-\delta + \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}\right) * t}}$

$\Rightarrow$ Knickbewegung ; $x(t \to \infty) = 0$

B) $\boxed{\delta^2 = \omega_0^2}$ $\Rightarrow$ aperiodischer Grenzfall ! $\Rightarrow \lambda_{1/2} = -\delta \prec 0$, reell , 2 zusammenfallende Lösungen

Lösung : $\boxed{x(t) = (A_1 + A_2 * t) * e^{-\delta * t}}$

$\Rightarrow$ Knickbewegung , da $x(t \to \infty) = 0$

C) $\boxed{\delta^2 \prec \omega_0^2}$ $\Rightarrow$ gedämpfte Schwingungen ! $\Rightarrow \lambda_{1/2} = -\delta \pm i * \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$; $i = \sqrt{-1}$

Lösung : $$\boxed{x(t) = e^{-\delta * t} * \left(C_1 * \cos\left(\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} * t \right) + C_2 * \sin\left(\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} * t \right) \right)}$$

Oder : $$\boxed{x(t) = X * e^{-\delta * t} * \sin\left(\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} * t + \alpha \right)}$$

Mit : $X = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}$ (Amplitude) und $\tan\alpha = \frac{C_1}{C_2}$ (Phase)

- Schwingung tendiert gegen Null wegen $e^{-\delta * t}$
- Keine periodische Schwingung , da Amplitudenmodulation $e^{-\delta * t}$

Dämpfungsmaße :

Logarithmisches Dekrement Λ : $\boxed{\Lambda = \delta * T = \ln\left(\frac{x(t)}{x(t+T)} \right)}$ Λ = Maß für Dämpfung !

Lehrsches Dämpfungsmaß D : $\boxed{D = \frac{\delta}{\omega_0}}$ wenn : D = 0 $\Rightarrow$ ungedämpft $(\delta = 0)$

D = 1 $\Rightarrow$ aperiodischer Grenzfall $\delta = \omega_0$

Zusammenhang :

$$\boxed{\Lambda = \delta * T = \frac{D * 2 * \pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}} = \frac{2 * \pi * \frac{\delta}{\omega_0}}{\sqrt{1 - \frac{\delta^2}{\omega_0^2}}} = \frac{2 * \pi * D}{\sqrt{1 - D^2}}}$$

Häufig in Technik : $D \prec\prec 1$; $\Rightarrow$ $\boxed{\Lambda \approx 2 * \pi * D}$

Begriffe

ω_0	Eigenkreisfrequenz	$\omega_0 = \sqrt{c/m}$
δ	Abklingkonstante	$2 * \delta = k/m$
λ	Lösungsansatz (freie, gedämpfte Schwingung.)	$\lambda_{1/2} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}$
X_h	Lösung der freien Schwingung	
X_p	Lösung der erzwungenen Schwingung	
η	Frequenzverhältnis	$\eta = \omega/\omega_0$
Λ	Logarithmisches Dekrement	$\Lambda = \delta * T = \ln(x(t)/x(t+T))$
D	Lehrsches Dämpfungsmaß	$D = \delta/\omega_0$

Reibungsdämpfung (= erzwungene Schwingungen):

Bewegungsgleichung : $\boxed{m * \ddot{x} + c * x + R = 0}$

$\Rightarrow$ Dgl. Inhomogen : $\boxed{\ddot{x} + \frac{c}{m} * x = \mp \frac{R}{m}}$ hier : $\frac{R}{m} = P(t)$

vollständige Lösung : $\boxed{x = x_h + x_p}$

homogene Lösung : $\boxed{x_h = C_1 * \cos(\omega_0 * t) + C_2 * \sin(\omega_0 * t)}$

partikuläre Lösung : $\boxed{x_p = \mp \frac{R}{m * \omega_0^2} = \mp \frac{R}{C}}$ mit $\omega_0 = \sqrt{\frac{C}{m}}$

vollständige Lösung : $\boxed{x = C_1 * \cos(\omega_0 * t) + C_2 * \sin(\omega_0 * t) \mp \frac{R}{c}}$

$\Rightarrow$ Erzwungene Schwingungen !!

Erzwungene Schwingungen :

Dgl. : $\boxed{m * \ddot{x} + k * \dot{x} + c * x = P(t)}$ P(t) = Erregerkraft

$P(t) = P_0 * \sin(\omega * t)$ oder

$P(t) = P_0 * \cos(\omega * t)$; $\omega =$ Erregerkreisfrequenz

Lösung der Dgl. : $\boxed{x = x_h + x_p}$

Lösung der homogenen Dgl. der Form : $\boxed{m * \ddot{x} + k * \dot{x} + c * x = 0}$

- siehe freie, gedämpfte Schwingungen -

Lösung der inhomogenen Dgl. der Form : $\boxed{m * \ddot{x} + k * \dot{x} + c * x = P(t)}$

- siehe Reibungsdämpfung -

- x_h bei realen Systemen stets abklingend , d.h. nach hinreichend großer Zeit nur noch x_p maßgebend !

Ungedämpfte , erzwungene Schwingung :

Dgl. : $\boxed{m * \ddot{x} + c * x = P_0 * \sin(\omega * t)}$; Dämpfung k = 0

$\Rightarrow$ Lösung : $\boxed{x(t) = x_p = X * \sin(\omega * t)}$ $X = \text{Zwangsamplitude}$, $\omega = \text{Erregerfrequenz}$

Frequenzverhältnis : $\boxed{\eta = \frac{\omega}{\omega_0}}$

Vergrößerungsfunktion :

$$\boxed{X = \frac{P}{\omega_0^2} * \underbrace{\frac{1}{\sqrt{\left(1-\eta^2\right)^2 + (2 * D * \eta)^2}}}_{\text{Vergrößerungsfunktion V}}}$$

Resonanz : Vergrößerungsfunktion V ist maximal bei $\frac{\partial V}{\partial \eta} = 0$!

$$\Rightarrow \quad \boxed{\omega_R = \frac{\omega_0}{\sqrt{1 - 2 * D^2}}} \qquad \boxed{X_R = \frac{P}{\omega_0^2} * V_R}$$

ω_R = Resonanzfrequenz ; X_R = Resonanzamplitude

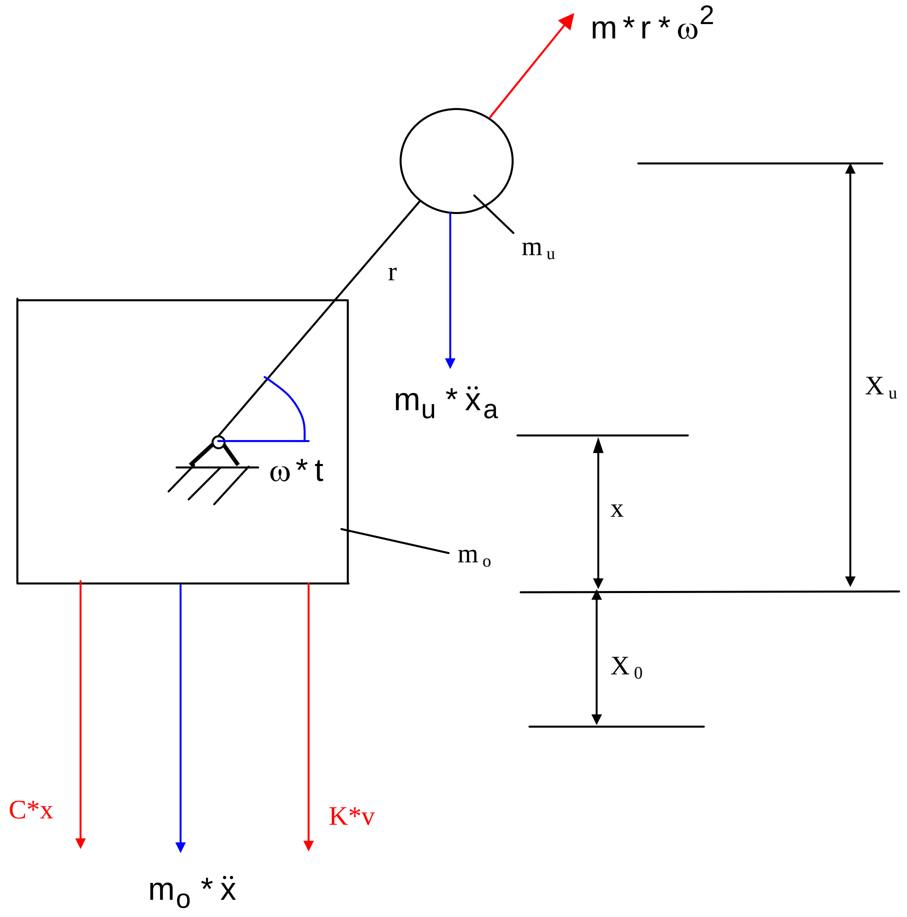
Resonanzfrequenzverhältnis : $\boxed{\eta_R = \sqrt{1 - 2 * D^2}}$

Für D > 1 / R ist das System nicht mehr resonanzfähig !!

Resonanzvergrößerungsfunktion : $\boxed{V_R = \frac{1}{2 * D * \sqrt{1 - D^2}}}$

Bewegungsgleichung bei Rotation : $\boxed{\ddot{\varphi} + \underbrace{2 * D * \omega_0}_{=2*\delta} * \dot{\varphi} + \omega_0^2 * \varphi = P * \sin(\omega * t)}$

Definition der Unwuchterregung :



$$\boxed{\begin{aligned} x_u &= x + r * \sin(\omega * t) \\ \dot{x}_u &= \dot{x} + r * \omega * \cos(\omega * t) \\ \ddot{x}_u &= \ddot{x} - r * \omega^2 + \sin(\omega * t) \end{aligned}}$$

Bewegungsgleichung :

$$\ddot{x} + \underbrace{\frac{k}{m_0 + m_u}}_{= 2 * D * \omega_0} * \dot{x} + \underbrace{\frac{c}{m_0 + m_u}}_{= \omega_0^2} * x = \underbrace{\left(\frac{m_u}{m_0 + m_u} * r * \omega^2\right)}_{= P(\omega)} * \sin(\omega * t)$$

gleichfrequenter Lösungsansatz : $x(t) = X * \sin(\omega * t - \varepsilon)$

Amplitude :

$$X = \frac{m_u * r}{m_u + m_0} * \frac{\eta^2}{\sqrt{(1 - \eta^2)^2 + (2 * D * \eta)^2}}$$

Phase :

$$\tan \varepsilon = \frac{2 * D * \eta}{1 - \eta^2}$$

Resonanz :

$$\omega_R = \frac{\omega_0}{\sqrt{1 - 2 * D^2}} \qquad X_R = \frac{\frac{m_u}{m_o + m_u} * r}{2 * D * \sqrt{1 - D^2}}$$

Fußpunkterregung :

Bewegungsgleichung : $\boxed{\ddot{x} + \underbrace{\frac{k}{m}}_{2*\delta = 2*D*\omega_0} * \dot{x} + \underbrace{\frac{c}{m}}_{\omega_0^2} * x = \underbrace{\frac{S_0}{m} * \sqrt{c^2 + k^2 * \omega^2}}_{P(\omega)} * \sin(\omega * t + \psi)}$

S_0 : Amplitude der Erregung

Amplitude des erregten Körpers : $\boxed{X = S_0 * \underbrace{\sqrt{\frac{1 + (2*D*\eta)^2}{\left(1-\eta^2\right)^2 + (2*D*\eta)^2}}}_{\text{Vergrößerungsfunktion } V_B}}$

Phase : $\boxed{\tan\gamma = \frac{2*D*\eta^3}{1-\eta^2 * \left(1-4*D^2\right)^2}}$ mit $\gamma = \varepsilon - \psi$

Cramersche Regel : $\boxed{\begin{array}{l} a_{11} * x_1 + a_{12} * x_2 + a_{13} * x_3 = c_1 \\ a_{21} * x_1 + a_{22} * x_2 + a_{23} * x_3 = c_2 \\ a_{31} * x_1 + a_{32} * x_2 + a_{33} * x_3 = c_3 \end{array}}$ (n- Geichungen)

$\Rightarrow$ $\boxed{\Delta\omega = \left|\begin{array}{ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{array}\right| \begin{array}{cc} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{array}}$

$-$ $+$

$\Rightarrow$ $\boxed{D_1 = \begin{vmatrix} c_1 & a_{12} & a_{13} \\ c_2 & a_{22} & a_{23} \\ c_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}$ $\boxed{D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & c_1 & a_{13} \\ a_{21} & c_2 & a_{23} \\ a_{31} & c_3 & a_{33} \end{vmatrix}}$ $\boxed{D_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & c_1 \\ a_{21} & a_{22} & c_2 \\ a_{31} & a_{32} & c_3 \end{vmatrix}}$

Lösung : $\boxed{X_i = \frac{D_i}{\Delta\omega}}$

Systeme mit 2 Freiheitsgraden :

Freie Schwingungen :

Eigenwerte :

$$\lambda_{1/2} = \frac{a_{11}+a_{22}}{2} \pm \frac{1}{2} * \sqrt{(a_{11}-a_{22})^2 + 4 * a_{12} * a_{21}}$$

$$\omega_1 = \sqrt{\lambda_1} \quad \text{und} \quad \omega_2 = \sqrt{\lambda_2}$$

Erzwungene Schwingungen :

Beispiel :

$$\ddot{x}_1 + \underbrace{\frac{C_1 + C_2}{m_2}}_{a_{11}} * x_1 - \underbrace{\frac{C_2}{m_1}}_{a_{12}} * x_2 = \frac{F_0}{m_1} * \sin(\omega * t)$$

$$\ddot{x}_2 - \underbrace{\frac{C_2}{m_2}}_{a_{21}} * x_1 + \underbrace{\frac{C_2}{m_2}}_{a_{22}} * x_2 = 0$$

Lösung :

$$x_{1p} = X_1 * \sin(\omega * t) \quad x_{2p} = X_2 * \sin(\omega * t)$$

mit Ableitungen und eingesetzt in obige Formel:

$$(a_{11} - \omega^2) * X_1 + a_{12} * X_2 = \frac{F_0}{m_1}$$

$$a_{21} * X_1 + (a_{22} - \omega^2) * X_2 = 0$$

Lösung anhand Cramersche Regel :

$$\Delta\omega = \begin{vmatrix} (a_{11}-\omega^2) & a_{12} \\ a_{21} & (a_{22}-\omega^2) \end{vmatrix} = (a_{11}-\omega^2) * (a_{22}-\omega^2) - a_{12} * a_{21}$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} \left(\frac{F_0}{m_1}\right) & a_{12} \\ 0 & (a_{22}-\omega^2) \end{vmatrix} = \left(\frac{F_0}{m_1}\right) * (a_{22}-\omega^2) - a_{12} * 0 = \left(\frac{F_0}{m_1}\right) * (a_{22}-\omega^2)$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} (a_{11}-\omega^2) & \left(\frac{F_0}{m_1}\right) \\ a_{21} & 0 \end{vmatrix} = 0 - \left(\frac{F_0}{m_1}\right) * a_{21}$$

Lösung :

$$X_1 = \frac{D_1}{\Delta\omega} = \frac{\frac{F_0}{m_1} * (a_{22}-\omega^2)}{\Delta\omega}$$

$$X_2 = \frac{D_2}{\Delta\omega} = -\frac{\frac{F_0}{m_1} * a_{21}}{\Delta\omega}$$

für $\Delta\omega = 0$ erhält man die beiden Resonanzfrequenzen :

$$\boxed{\omega_{1/2}^2 = \frac{a_{11} + a_{22}}{2} \pm \frac{1}{2} * \sqrt{(a_{11} - a_{22})^2 + 4 * a_{12} * a_{21}}}$$

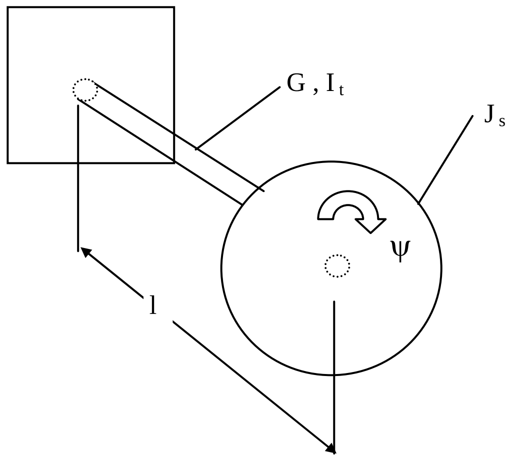
Nach Fundamentalsatz der Algebra gilt für $\Delta\omega$:

$$\boxed{\Delta\omega = \left(\omega^2 - \omega_1^2\right) * \left(\omega^2 - \omega_2^2\right)}$$

Torsionsschwingungen :

Bewegungsgleichung :

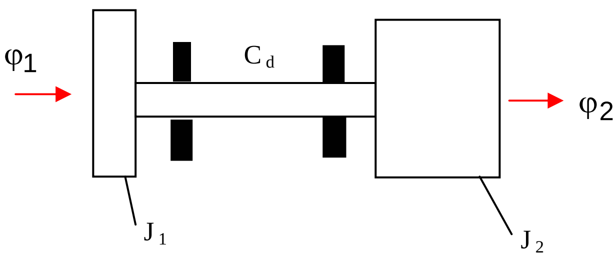
$$\boxed{\ddot{\psi} + \underbrace{\frac{c_d}{J_s}}_{= \omega_0^2} * \psi = 0}$$



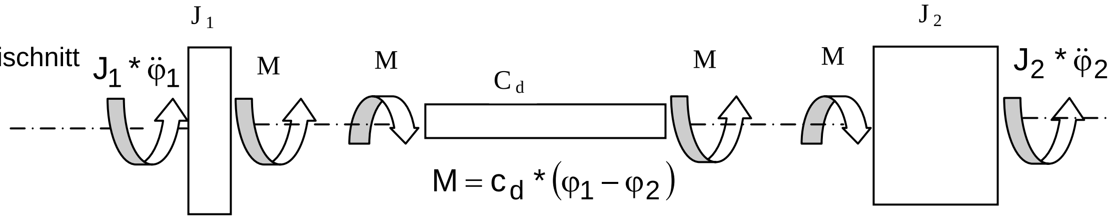
$$\boxed{c_d = \frac{G * I_t}{l}}$$

$$\boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{G * I_t}{l * J_s}}}$$

Systeme mit 2 und 3 Massen :



Freischnitt



$$M = c_d * (\varphi_1 - \varphi_2)$$

Bewegungsgleichung :

$$\boxed{\begin{aligned} J_1 * \ddot{\varphi}_1 + c_d * (\varphi_1 - \varphi_2) = 0 \\ J_2 * \ddot{\varphi}_2 - c_d * (\varphi_1 - \varphi_2) = 0 \end{aligned}}$$

$\Rightarrow$ $\boxed{J_1 * \ddot{\varphi}_1 + J_2 * \ddot{\varphi}_2 = 0}$ bei n – Massen : $\boxed{\sum_{j=1}^{n} J_j * \ddot{\varphi}_j = 0}$

Ansatz :

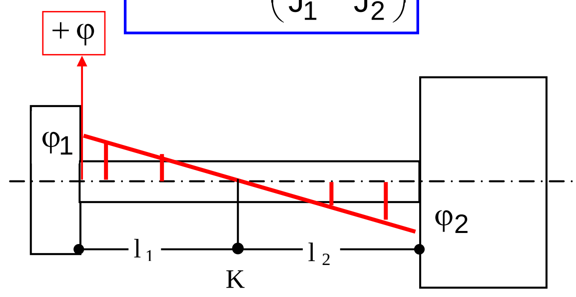
$$\boxed{\begin{array}{ll} \varphi_1 = \hat{\varphi}_1 * \sin(\omega * t + \varepsilon) & \Rightarrow \ddot{\varphi}_1 = -\omega^2 * \varphi_1 \\ \varphi_2 = \hat{\varphi}_2 * \sin(\omega * t + \varepsilon) & \Rightarrow \ddot{\varphi}_2 = -\omega^2 * \varphi_2 \end{array}}$$

Bewegungsgleichungen :

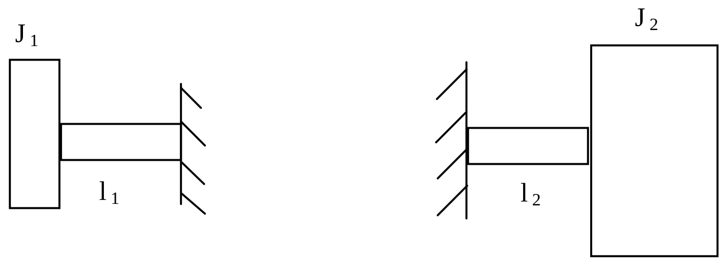
$$\boxed{\begin{array}{l} (c_d - J_1 * \omega^2) * \varphi_1 - c_d * \varphi_2 = 0 \\ J_1 * \varphi_1 + J_2 * \varphi_2 = 0 \end{array}}$$

Lösung über Cramersche Regel : $\boxed{\Delta\omega = (c_d - J_1 * \omega^2) * J_2 + c_d * J_1 = 0}$

$$\Rightarrow \boxed{\omega_1^2 = c_d * \left(\frac{1}{J_1} + \frac{1}{J_2} \right)}$$



K = Punkt, der in Ruhe bleibt : Schwingungsknoten !!
D.h. 2 Teilsysteme mit Längen l_1 und l_2 , die im Schwingungsknoten fest eingespannt sind .



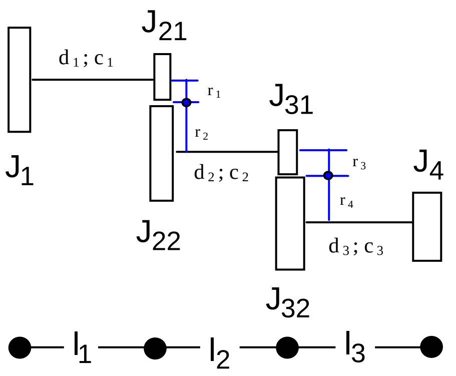
$\boxed{\omega_{01}^2 = \frac{G * I_t}{l_1 * J_1}}$ $\boxed{\omega_{01}^2 = \omega_{02}^2}$ $\boxed{\omega_{02}^2 = \frac{G * I_t}{l_2 * J_2}}$

$$\Rightarrow \boxed{J_1 * l_1 = J_2 * l_2}$$

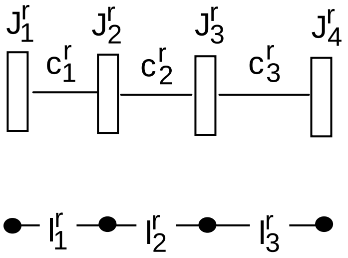
$$\Rightarrow \boxed{l_1 = \frac{J_1}{J_1 + J_2} * l_{ges}}$$ (Ort von K)

Reduzierung versetzter Getriebe :

Ausgangsmodell :



reduziertes Modell :



1) Reduzierung der Trägheitsmomente :

$$J_1^r = J_1$$

$$J_2^r = J_{21} + J_{22} * \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2$$

$$J_3^r = J_{31} * \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 + J_{32} * \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 * \left(\frac{r_3}{r4}\right)^2$$

$$J_4^r = J_4 * \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 * \left(\frac{r_3}{r_4}\right)^2$$

2) Reduzierung der Federsteifigkeiten :

$$c_1^r = c_1$$

$$c_2^r = c_2 * \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2$$

$$c_3^r = c_3 * \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 * \left(\frac{r_3}{r_4}\right)^2$$

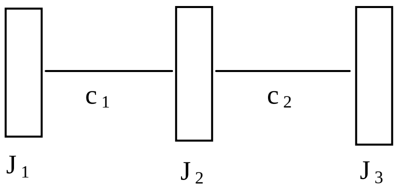
3) Reduzierung der Längen :

$$l_1^r = l_1$$

$$l_2^r = l_2 * \frac{l_{p1}}{l_{p2}} * \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2 = l_2 * \left(\frac{d_1}{d_2}\right)^4 * \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2$$

$$l_3^r = l_3 * \frac{l_{p1}}{l_{p3}} * \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2 * \left(\frac{r_4}{r_3}\right)^2 = l_3 * \left(\frac{d_1}{d_3}\right)^4 * \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2 * \left(\frac{r_4}{r_3}\right)^2$$

Reduzietes Modell entspricht ``System mit 2 und 3 Massen `` :



Durch Freischneiden :

$$\boxed{\begin{aligned} &J_1 * \ddot{\varphi}_1 + c_1 * (\varphi_1 - \varphi_2) = 0 \\ &J_2 * \ddot{\varphi}_2 - c_1 * (\varphi_1 - \varphi_2) + c_2 * (\varphi_2 - \varphi_3) = 0 \\ &J_3 * \ddot{\varphi}_3 - c_2 * (\varphi_2 - \varphi_3) = 0 \quad \text{und} \\ &J_1 * \ddot{\varphi}_1 + J_2 * \ddot{\varphi}_2 + J_3 * \ddot{\varphi}_3 = 0 \end{aligned}}$$

Lösungsansatz :

$$\boxed{\begin{aligned} &\varphi_1 = \hat{\varphi}_1 * \sin(\omega * t + \varphi_0) \quad ; \quad \ddot{\varphi}_1 = -\omega^2 * \varphi_1 \\ &\text{analog } \varphi_2 \text{ und } \varphi_3 \end{aligned}}$$

Eingesetzt in Gleichung und umgeformt folgt :

$$\boxed{\omega^4 - \underbrace{\left(c_1 * \frac{J_1 + J_2}{J_1 * J_2} + c_2 * \frac{J_2 + J_3}{J_2 * J_3}\right)}_{a} * \omega^2 + \underbrace{c_1 * c_2 * \frac{J_1 + J_2 + J_3}{J_1 * J_2 * J_3}}_{b} = 0}$$

$$\Rightarrow \boxed{\omega_{1/2}^2 = \frac{a}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b}} \quad \Rightarrow \boxed{\omega_{01} = +\sqrt{\omega_1^2} \quad ; \quad \omega_{02} = +\sqrt{\omega_2^2}}$$

4) Berechnung des Neuberschen Grenzwertes : $\omega_{01}^2 = \dfrac{1}{\dfrac{1}{\omega_1^2} + \dfrac{1}{\omega_2^2} + \ldots\ldots}$

Neuberscher Grenzwert : $\omega_1^2 = \dfrac{1}{\dfrac{1}{\omega_{01}^2} + \dfrac{1}{\omega_{02}^2}}$