1. Beispiel Zweimassenschwinger

Vorlesungsbeispiel: $m_1=m_2=m$; $C_1=C_2=C$; $C/m=100\ s^{-2}$ gesetzt.

Eigenkreisfrequenzen [1/s]: $\omega_1 := 6.18$ $\quad\omega_2 := 16.18$

Integrationskonstanten: $A_1 := 1$ $\quad D_1 := 1$ $\quad A_2 := 1$ $\quad D_2 := 1$

Amplitudenverhältnisse [1]: $\mu_1 := 1.618$ $\quad\mu_2 := -0.618$

Variationsschritte der Bereichsvariablen Zeit: $u := 500$

Maximale Zeit [s]: $T := 3$

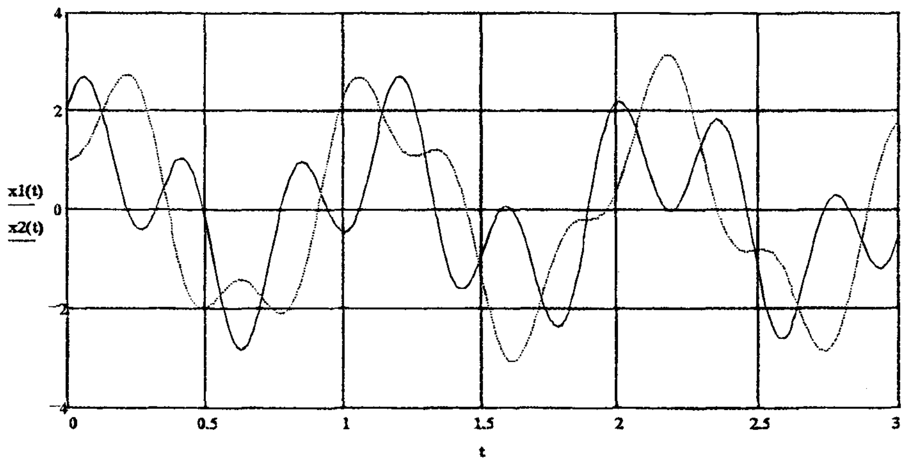
Bereichsvariable [s]: $t := 0, \frac{T}{u} .. T$

Schwingweg x1 :

$$x1(t) := A_1 \cdot \cos(\omega_1 \cdot t) + D_1 \cdot \sin(\omega_1 \cdot t) + A_2 \cdot \cos(\omega_2 \cdot t) + D_2 \cdot \sin(\omega_2 \cdot t)$$

Schwingweg x2 :

$$x2(t) := \mu_1 \cdot A_1 \cdot \cos(\omega_1 \cdot t) + \mu_1 \cdot D_1 \cdot \sin(\omega_1 \cdot t) + \mu_2 \cdot A_2 \cdot \cos(\omega_2 \cdot t) + \mu_2 \cdot D_2 \cdot \sin(\omega_2 \cdot t)$$



Anmerkung:

Dies ist allgemeinste Form der Lösung, da alle Integrationskonstanten vorhanden sind.

Die Lösungen sind nicht periodisch!

Die zugehörigen Anfangsbedingungen lauten:

$x_1(0)=2$; $x_2(0)=1$; $v_1(0)=22{,}36$; $v_2(0)=0$.

1. Beispiel Zweimassenschwinger

Vorlesungsbeispiel: $m_1=m_2=m$; $C_1=C_2=C$; $C/m=100\ s^{-2}$ gesetzt.

Eigenkreisfrequenzen [1/s]: $\omega_1 := 6.18$ $\qquad \omega_2 := 16.18$

Integrationskonstanten: $A_1 := 1$ $\qquad D_1 := 0$ $\qquad A_2 := 0$ $\qquad D_2 := 0$

Amplitudenverhältnisse [1]: $\mu_1 := 1.618$ $\qquad \mu_2 := -0.618$

Variationsschritte der Bereichsvariablen Zeit: $u := 500$

Maximale Zeit [s]: $T := 3$

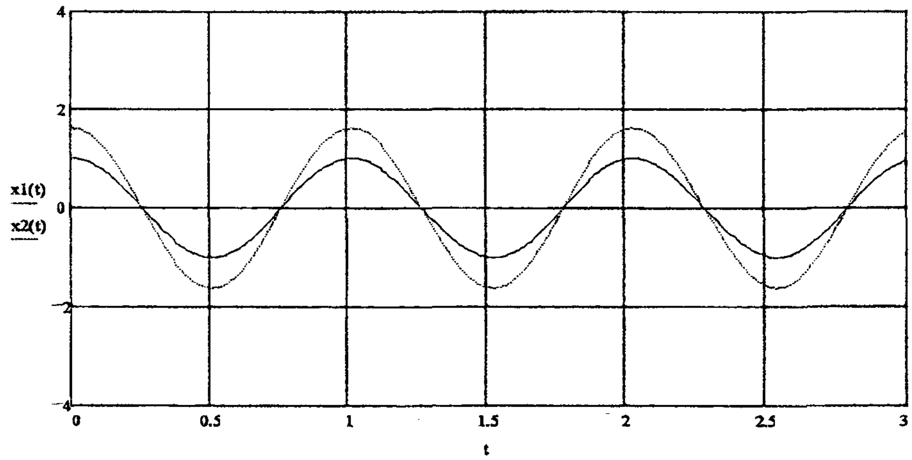
Bereichsvariable [s]: $t := 0, \frac{T}{u} .. T$

Schwingweg x1 :

$$x1(t) := A_1 \cdot \cos(\omega_1 \cdot t) + D_1 \cdot \sin(\omega_1 \cdot t) + A_2 \cdot \cos(\omega_2 \cdot t) + D_2 \cdot \sin(\omega_2 \cdot t)$$

Schwingweg x2 :

$$x2(t) := \mu_1 \cdot A_1 \cdot \cos(\omega_1 \cdot t) + \mu_1 \cdot D_1 \cdot \sin(\omega_1 \cdot t) + \mu_2 \cdot A_2 \cdot \cos(\omega_2 \cdot t) + \mu_2 \cdot D_2 \cdot \sin(\omega_2 \cdot t)$$



Anmerkung:

Dies ist die mit der 1. Eigenkreisfrequenz ablaufende Hauptschwingung, die 1. Eigenform!

Die Lösungen sind periodisch und gleichphasig!

Die zugehörigen Anfangsbedingungen lauten:

$x_1(0)=1$; $x_2(0)=1{,}618$; $v_1(0)=0$; $v_2(0)=0$.

1. Beispiel Zweimassenschwinger

Vorlesungsbeispiel: $m_1=m_2=m$; $C_1=C_2=C$; $C/m=100\ s^{-2}$ gesetzt.

Eigenkreisfrequenzen [1/s]: $\omega_1 := 6.18$ $\omega_2 := 16.18$

Integrationskonstanten: $A_1 := 0$ $D_1 := 0$ $A_2 := 1$ $D_2 := 0$

Amplitudenverhältnisse [1]: $\mu_1 := 1.618$ $\mu_2 := -0.618$

Variationsschritte der Bereichsvariablen Zeit: $u := 500$

Maximale Zeit [s]: $T := 3$

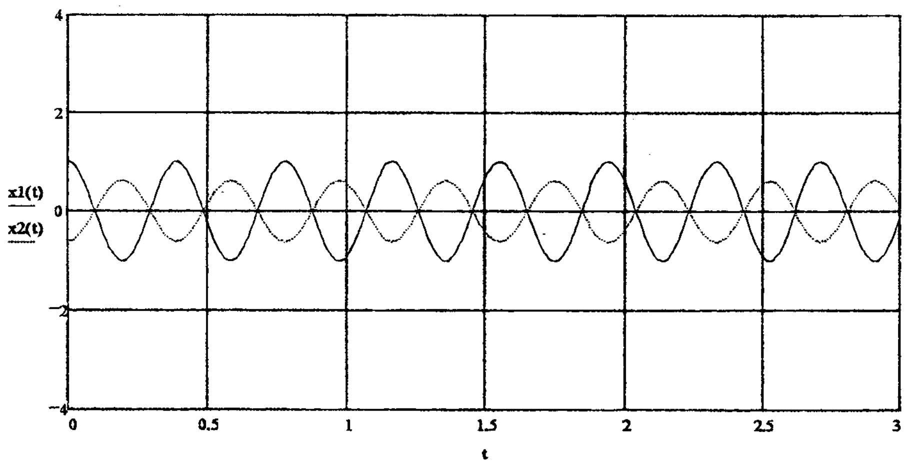
Bereichsvariable [s]: $t := 0, \frac{T}{u} .. T$

Schwingweg x1 :

$$x1(t) := A_1 \cdot \cos(\omega_1 \cdot t) + D_1 \cdot \sin(\omega_1 \cdot t) + A_2 \cdot \cos(\omega_2 \cdot t) + D_2 \cdot \sin(\omega_2 \cdot t)$$

Schwingweg x2 :

$$x2(t) := \mu_1 \cdot A_1 \cdot \cos(\omega_1 \cdot t) + \mu_1 \cdot D_1 \cdot \sin(\omega_1 \cdot t) + \mu_2 \cdot A_2 \cdot \cos(\omega_2 \cdot t) + \mu_2 \cdot D_2 \cdot \sin(\omega_2 \cdot t)$$



Anmerkung:

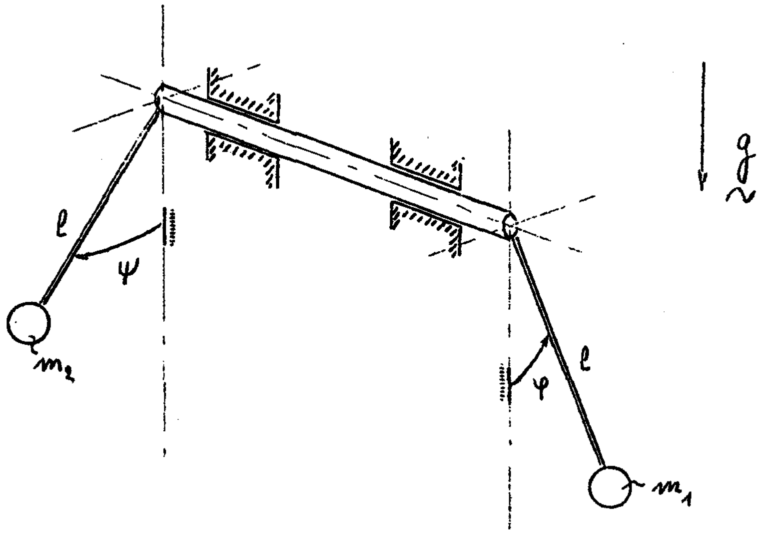
Dies ist die mit der 2. Eigenkreisfrequenz ablaufende Hauptschwingung, die 2. Eigenform!

Die Lösungen sind periodisch und gegenphasig!

Die zugehörigen Anfangsbedingungen lauten:

$x_1(0)=1$; $x_2(0)=-0{,}618$; $v_1(0)=0$; $v_2(0)=0$.

2. Beispiel Zweimassenschwinger



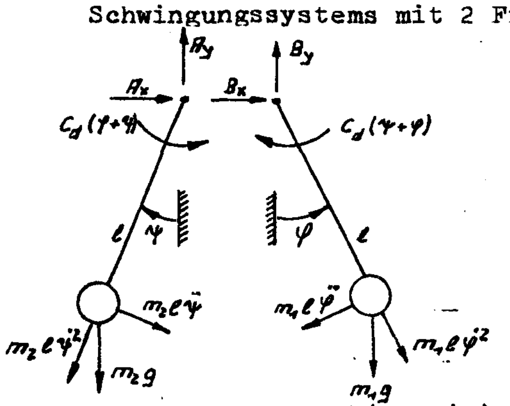
Zwei im Schwerkraftfeld der Erde schwingende Punktpendel mit den Massen m_1 und m_2 sind an den Enden einer masselosen, elastischen und reibungsfrei drehbar gelagerten Welle mit der Drehfederkonstanten c_d befestigt. Die Pendelstangen haben die Länge l und seien masselos. Die Welle ist in der Stellung $\varphi = \psi = 0$ untordiert.

1. Mittels des Prinzips von d'Alembert ermittle man die Bewegungsgleichungen des Systems in φ und ψ und linearisiere sie für kleine Winkel φ und ψ.

2. Für den Fall $m_1 = m_2 = m$ berechne man die Eigenkreisfrequenzen des Systems.

2. Beispiel Zweimassenschwinger

Lösung
(exemplarische Berechnung der Eigenkreisfrequenzen eines Schwingungssystems mit 2 Freiheitsgraden)



1.) Bewegungsgleichungen

$$\left\| \begin{array}{l} -m_1 l^2 \ddot{\varphi} - m_1 g l \sin\varphi - c_d(\varphi+\psi) = 0 \\ m_2 l^2 \ddot{\psi} + m_2 g l \sin\psi + c_d(\varphi+\psi) = 0 \end{array} \right\|$$

nichtlineares, gekoppeltes Dgl.-System

Erste Näherungsaussagen über Lösungsverhalten durch Linearisierung, d.h. auftretende quadratische Glieder und Glieder höherer Ordnung der Variablen und deren Ableitungen werden einfach vernachlässigt; hier also

$$\sin\varphi = \varphi - \frac{\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^5}{5!} + \ldots \rightarrow \sin\varphi \approx \varphi \quad , \quad \sin\psi \approx \psi$$

In diesem Falle gute Näherungen für kleine Winkel.
Somit linearisierte Bewegungsgleichungen:

$$\left\| \begin{array}{l} m_1 l^2 \ddot{\varphi} + (m_1 g l + c_d)\varphi + c_d \psi = 0 \\ m_2 l^2 \ddot{\psi} + (m_2 g l + c_d)\psi + c_d \varphi = 0 \end{array} \right\|$$

2. Eigenkreisfrequenzen
Zur Berechnung der Eigenkreisfrequenzen hat man das ungedämpfte (alle Glieder mit Dämpfungsanteil sind zu streichen), homogene (alle rechen Seiten müßen Null sein) System zu betrachten,
bei dieser Aufgabe also obige, linearisierte Bewegungsgleichungen.

a) Man nimmt nun an, die Lösungen seien Schwingungen und macht einen komplexen Schwingungsansatz für beide Variablen:

$$\varphi = A \cdot e^{i\omega t} \quad \text{und} \quad \psi = B \cdot e^{i\omega t}$$

mit zunächst noch unbekannten Amplituden und unbekannter Kreisfrequenz ω.

2. Beispiel Zweimassenschwinger

b) Der Ansatz (und seine Zeitableitungen) werden in das Dgl.-System eingesetzt;
mit $\ddot{\varphi} = -A\omega^2 e^{i\omega t}$, $\ddot{\psi} = -B\omega^2 \cdot e^{i\omega t}$ sowie $m_1 = m_2 = m$ folgt:

$$-m\ell^2\omega^2 A\cdot e^{i\omega t} + (mg\ell + c_d)A\cdot e^{i\omega t} + c_d B\cdot e^{i\omega t} = 0$$

$$-m\ell^2\omega^2 B\cdot e^{i\omega t} + (mg\ell + c_d)B\cdot e^{i\omega t} + c_d A\cdot e^{i\omega t} = 0$$

da $e^{i\omega t} \neq 0$: $\rightarrow$ Algebraisches Gleichungssystem für die Amplituden A und B der sich einstellenden Schwingung:

$$(-m\ell^2\omega^2 + (mg\ell + c_d))A + c_d \cdot B = 0$$

$$c_d \cdot A + (-m\ell^2\omega^2 + (mg\ell + c_d))B = 0$$

c) Für nicht triviale Lösungen (A≠0 und B≠0) muß die Determinante dieses Gleichungssystems verschwinden: $\Delta(\omega) \overset{!}{=} 0$

$$\Delta(\omega) = \begin{vmatrix} -m\ell^2\omega^2 + (mg\ell + c_d) & c_d \\ c_d & -m\ell^2\omega^2 + (mg\ell + c_d) \end{vmatrix} \overset{!}{=} 0$$

$$\rightarrow m^2\ell^4\omega^4 - 2(m^2\ell^3 g + m\ell^2 c_d)\omega^2 + m^2g^2\ell^2 + 2mg\ell c_d + c_d^2 - c_d^2 = 0$$

$$\omega^4 - 2\left(\frac{g}{\ell} + \frac{c_d}{m\ell^2}\right)\omega^2 + \left(\frac{g}{\ell} + \frac{2c_d}{m\ell^2}\right)\frac{g}{\ell} = 0$$

$$\omega_{1/2}^2 = \frac{g}{\ell} + \frac{c_d}{m\ell^2} \pm \sqrt{\left(\frac{g}{\ell} + \frac{c_d}{m\ell^2}\right)^2 - \frac{g}{\ell}\left(\frac{g}{\ell} + \frac{2c_d}{m\ell^2}\right)}$$

$\rightarrow$ Eigenkreisfrequenzen: $\underline{\omega_1^2 = \frac{g}{\ell}}$, $\underline{\omega_2^2 = \frac{g}{\ell} + \frac{2c_d}{m\ell^2}}$

M.a.W.: Es stellen sich also nur (Eigen-)Schwingungen mit von Null verschiedenen Amplituden ein, deren Kreisfrequenz entweder ω_1 oder ω_2 beträgt.
Für alle anderen ω- Werte ist obiges Gleichungssystem nur gültig für A = B = 0; dann aber auch $\varphi(t) = \psi(t) \equiv 0$ (trivialer Fall, bei homogenen Systemen immer möglich).