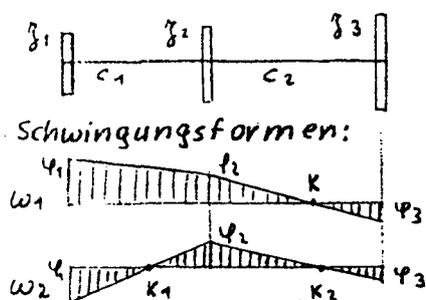


3 Massen, freies System



Durch Freischneiden erhält man
 (für $M=0$ und $D=0$):

$$J_1 \cdot \ddot{\varphi}_1 + C_1(\varphi_1 - \varphi_2) = 0 \quad \text{I}$$

$$J_2 \cdot \ddot{\varphi}_2 - C_1(\varphi_1 - \varphi_2) + C_2(\varphi_2 - \varphi_3) = 0 \quad \text{II}$$

$$J_3 \cdot \ddot{\varphi}_3 - C_2(\varphi_2 - \varphi_3) = 0 \quad \text{III}$$

Durch Addition dieser 3 Gln:

$$J_1 \cdot \ddot{\varphi}_1 + J_2 \cdot \ddot{\varphi}_2 + J_3 \cdot \ddot{\varphi}_3 = 0 \quad \text{IV}$$

Lösungsansatz: $\varphi_1 = \hat{\varphi}_1 \cdot \sin(\omega t + \varphi_0) \Rightarrow \ddot{\varphi}_1 = -\hat{\varphi}_1 \cdot \omega^2 \cdot \sin(\omega t + \varphi_0) = -\omega^2 \cdot \varphi_1$
 analog: $\varphi_2 = \dots$ und $\varphi_3 = \dots$

dies eingesetzt \Rightarrow I $J_1 \cdot \omega^2 \cdot \varphi_1 - C_1(\varphi_1 - \varphi_2) = 0 \Rightarrow \varphi_1 = \dots \cdot \varphi_2$

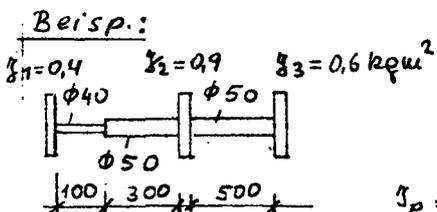
II $J_3 \cdot \omega^2 \cdot \varphi_3 + C_2(\varphi_2 - \varphi_3) = 0 \Rightarrow \varphi_3 = \dots \cdot \varphi_2$

IV $J_1 \cdot \omega^2 \cdot \varphi_1 + J_2 \cdot \omega^2 \cdot \varphi_2 + J_3 \cdot \omega^2 \cdot \varphi_3 = 0$

setzt man φ_1 und φ_3 in IV ein, so kürzt sich φ heraus
 und man erhält nach Umformung:

$$\omega^4 \cdot \underbrace{\left(C_1 \cdot \frac{J_1 + J_2}{J_1 \cdot J_2} + C_2 \cdot \frac{J_2 + J_3}{J_2 \cdot J_3} \right)}_a \cdot \omega^2 + C_1 \cdot C_2 \cdot \underbrace{\frac{J_1 + J_2 + J_3}{J_1 \cdot J_2 \cdot J_3}}_b = 0 \Rightarrow$$

$$\omega_{1,2}^2 = \frac{a}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b} \Rightarrow \boxed{\omega_{01} = +\sqrt{\omega_1^2}} \quad \boxed{\omega_{02} = +\sqrt{\omega_2^2}}$$



$$G = 8 \cdot 10^6 \text{ N/cm}^2$$

gesucht: ω_{01} ; ω_{02}

$$J_p = \frac{\pi \cdot d^4}{32} \rightarrow \phi 40 \Rightarrow J_{p1} = 25,13 \text{ cm}^4$$

$$\phi 50 \Rightarrow J_{p2} = 61,36 \text{ cm}^4$$

$$\frac{1}{C_1} = \frac{1}{C_{\phi 40}} + \frac{1}{C_{\phi 50}} = \frac{10}{8 \cdot 10^6 \cdot 25,13} + \frac{30}{8 \cdot 10^6 \cdot 61,36} \Rightarrow C_1 = 9,02 \cdot 10^4 \frac{\text{kg} \cdot \text{cm}^2}{\text{s}^2}$$

$$C_2 = 9,82 \cdot 10^4 \text{ cm}^4$$

$$a = \left(9,02 \cdot \frac{0,4 + 0,9}{0,4 \cdot 0,9} + 9,82 \cdot \frac{0,9 + 0,6}{0,9 \cdot 0,6} \right) \cdot 10^4 = 59,85 \cdot 10^4 \frac{1}{\text{s}^2}; \quad b = 779,1 \cdot 10^8 \frac{1}{\text{s}^4}$$

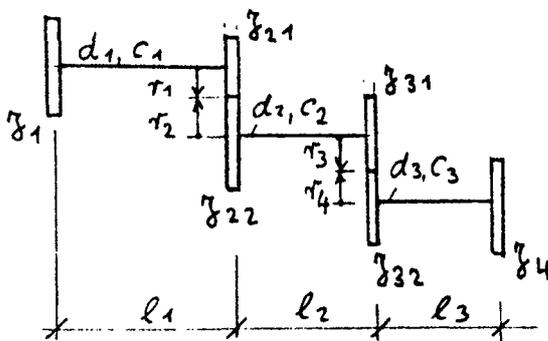
$$\omega_{1,2}^2 = 29,93 \cdot 10^4 \pm \sqrt{29,93^2 - 779,1} \cdot 10^4 \Rightarrow \omega_{02} = 638 \frac{1}{\text{s}}$$

$$\omega_{01} = 437 \frac{1}{\text{s}}$$

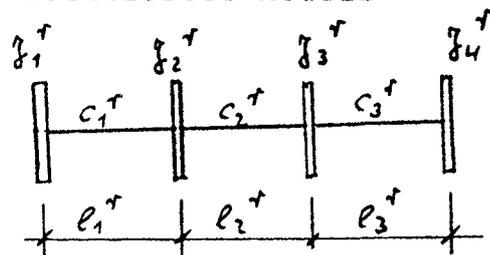
Reduktion versetzter Getriebe

Um die üblichen Rechenverfahren zur Ermittlung von Torsions-eigenfrequenzen anwenden zu können, müssen Getriebe auf eine Vergleichswelle ohne Übersetzung (und auch evtl. auf $d = \text{konst.}$) umgerechnet werden.

Ausgangsmodell



reduziertes Modell



Reduktion der Trägheitsmomente

$$J_1^r = J_1$$

$$J_2^r = J_{21} + J_{22} \left(\frac{r_1}{r_2} \right)^2$$

$$J_3^r = J_{31} \left(\frac{r_1}{r_2} \right)^2 + J_{32} \left(\frac{r_1}{r_2} \right)^2 \left(\frac{r_3}{r_4} \right)^2$$

$$J_4^r = J_4 \left(\frac{r_1}{r_2} \right)^2 \left(\frac{r_3}{r_4} \right)^2$$

Die kinet. Energie $\frac{J}{2} \omega^2$ soll bei jeder Masse für Ausgangsmodell und reduziertes Modell gleich sein. \wedge Quadrat. des Übersetzungsverhältnisses als Faktor.

Reduktion der Torsionsfederkonstanten

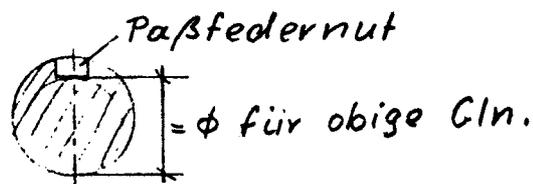
$$c_1^r = c_1$$

$$c_2^r = c_2 \left(\frac{r_1}{r_2} \right)^2$$

$$c_3^r = c_3 \left(\frac{r_3}{r_4} \right)^2 \left(\frac{r_1}{r_2} \right)^2$$

Die Gültigkeit dieser Gln. kann man über die Pot. Energie zeigen.

Beachte:

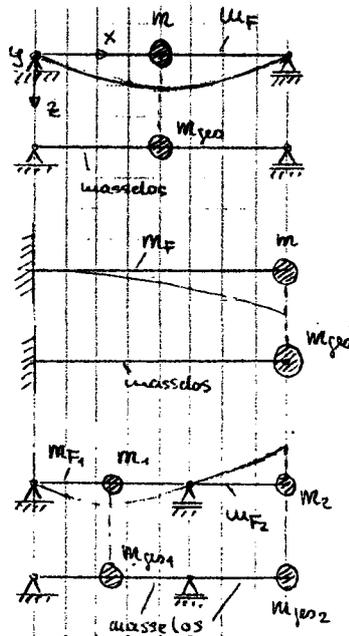


Massenzuschlag

Zuschlag beim Balken:

$$m_{ps} \approx m + \frac{u_F}{[w(x)]^2 \cdot l} \cdot \int_0^l [w(x)]^2 dx$$

Stelle Einzelmasse
stet. Biegelinie



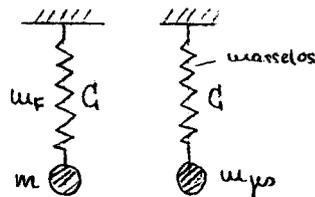
$$m_{ps} \approx m + \frac{m_F}{2}$$

$$m_{ps} \approx m + \frac{m_F}{4}$$

$$m_{ps1} \approx u_{F1} + \frac{u_{F1}}{2}$$

$$m_{ps2} \approx u_{F2} + \frac{u_{F2}}{3}$$

Zuschlag beim Stab (lineare Schraubenfeder):

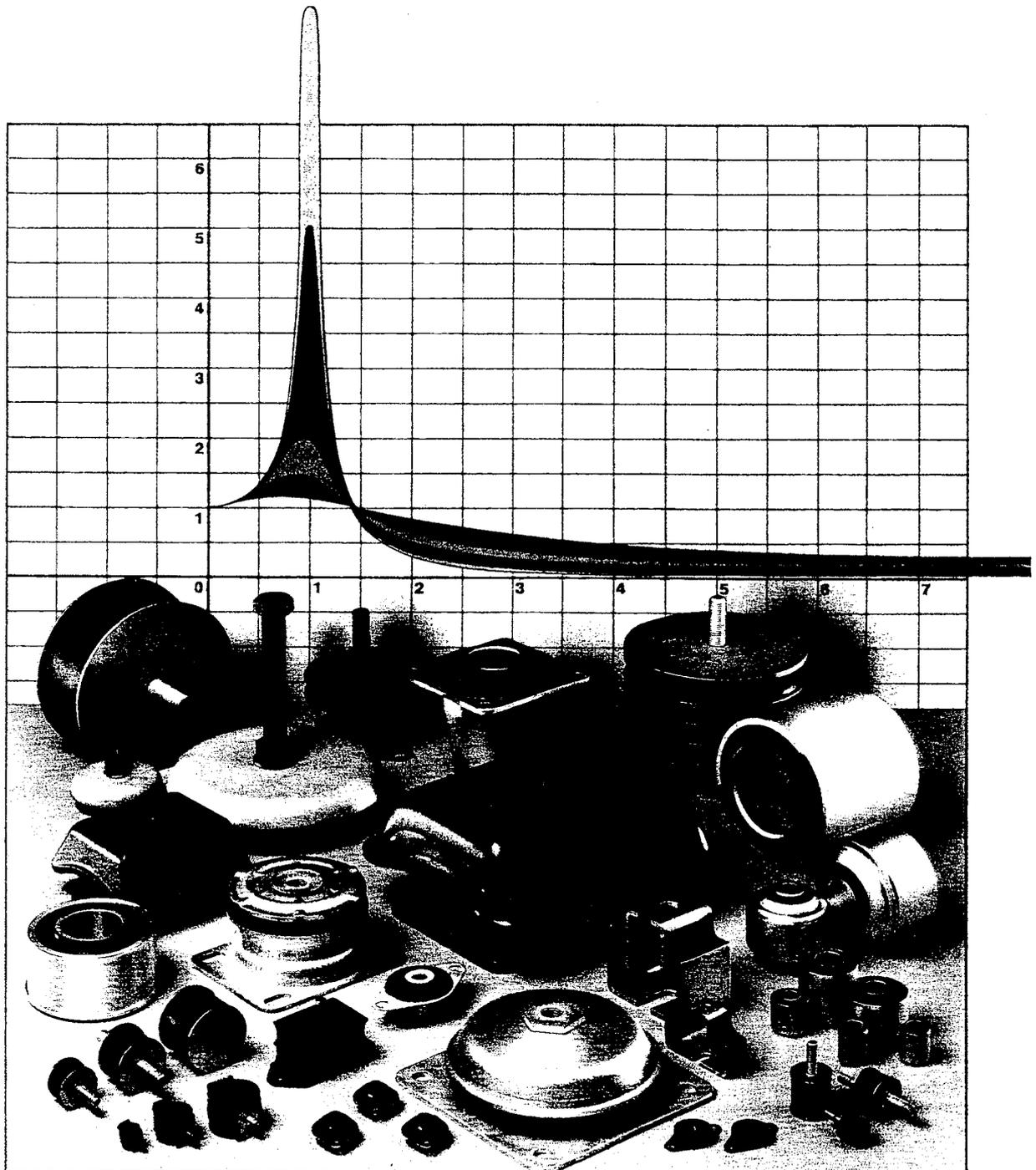


$$m_{ps} \approx m + \frac{u_F}{3}$$

Auswahl der Schwingungsdämpfer

**Standard-Bauelemente
für die Schwingungsisolierung**

**freudenberg
megulastik**



Auswahl der Schwingungsdämpfer

Schwingungs- dämpfung und Schwingungs- isolation

Praktisch überall, wo Körper oder Massen bewegt bzw. beschleunigt werden, ergeben sich Rückwirkungen auf das System in Form von Schwingungen. Diese können als Lärm oder Vibration stören oder zu einer zusätzlichen dynamischen Bauteilbeanspruchung führen.

Damit Schwingungen auftreten können, muß ein schwingungsfähiges System, d. h. mindestens eine Masse und eine Feder vorhanden sein. Während in der Praxis die „Masse“ leicht zu erkennen ist, ist die „Feder“ auf den ersten Blick oft schwerer zu identifizieren. So kann das Gehäuse, ein Träger oder der Fahrzeugrahmen als Feder wirken.

Ziel der Schwingungsdämpfung oder der Schwingungsisolierung ist es, durch Einsatz von zusätzlichen, genau abgestimmten Dämpfern oder Federn die auftretenden Schwingungsamplituden zu minimieren.

Die theoretischen Grundlagen der Schwingungsdämpfung und Schwingungsisolierung sollen im folgenden am Beispiel des Ein-Massen-Schwingers erläutert werden.

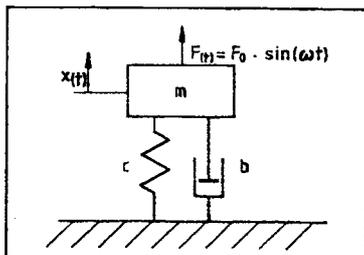


Abb. 1 Ersatzschaltbild eines Ein-Massen-Schwingers

Ausgehend vom Kräftegleichgewicht des abgebildeten Schwingers

Massen- + Dämpfungs- + Feder- = Erreger-
 kraft kraft kraft kraft

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + cx = F(t)$$

läßt sich die Übertragungsfunktion der Kraft, d. h. das Amplitudenverhältnis der in den Lagerpunkt eingeleiteten Kraft zur anregenden Kraft aus der o. g. DGL ableiten; man erhält:

$$\frac{F_L}{F_0} = \sqrt{\frac{1 + (2D\lambda)^2}{(1 - \lambda^2)^2 + (2D\lambda)^2}}$$

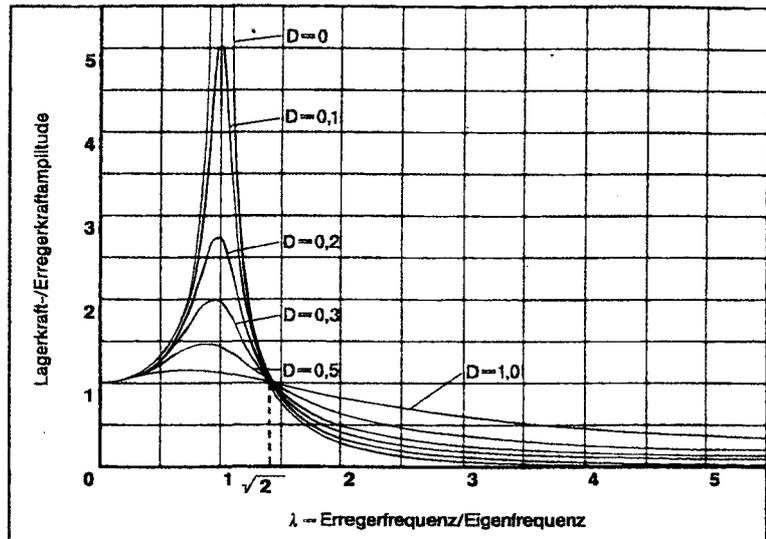


Abb. 2 Übertragungsfunktion

Aus der Übertragungsfunktion – vgl. Abb. 2 – läßt sich für das Schwingungsverhalten des Ein-Masse-Feder-Dämpfer-Systems ableiten:

1. Die Auflagerkräfte erreichen ihre maximalen und damit kritischen Werte, wenn die Erregerfrequenz mit der Eigenfrequenz übereinstimmt ($\lambda \approx 1$). In diesem Fall spricht man von Resonanz.
2. Im sogenannten unterkritischen ($\lambda < 1$) und Resonanzbereich ist die Auflagerkraft immer größer als die Erregerkraft und läßt sich nur durch Erhöhung der Dämpfung reduzieren. In diesem Fall spricht man von Schwingungsdämpfung.
3. Im überkritischen Bereich, ab einem Frequenzverhältnis $\lambda = \sqrt{2}$, ist die Auflagerkraft geringer als die Erregerkraft. Man spricht hier von Schwingungsisolierung. Die Dämpfung ist unerwünscht, da diese die Lagerkräfte erhöht. Für diesen Anwendungsfall, z.B. Lagerung stationärer Maschinen, eignen sich Elastomerfedern mit niedriger Dämpfung.
4. Je kleiner die Eigenfrequenz im Verhältnis zur Erregerfrequenz ist, desto besser ist die Schwingungsisolierung des Systems.

Ein Maß für die Verringerung der Erregerkraft im Lager und damit für die Güte der Schwingungsisolierung ist der Isolationsgrad:

$$i = \frac{F_0 - F_L}{F_0} = 1 - \sqrt{\frac{1 + (2D\lambda)^2}{(1 - \lambda^2)^2 + (2D\lambda)^2}}$$

Die Eigenfrequenz des ungedämpften Schwingers n_0 läßt sich aus der statischen Einfederung s gemäß nachstehender Formel berechnen, wenn s in mm eingesetzt wird:

$$n_0 = \frac{950}{\sqrt{s}} \left[\frac{1}{\text{min}} \right]$$

Aus den beiden o. g. Gleichungen ergibt sich für den ungedämpften Schwinger ($D = 0$) das nebenstehende Diagramm. Es stellt den Zusammenhang zwischen gegebener Erregerfrequenz n_{err} gewünschtem Isolationsgrad i und erforderlicher statischer Einfederung s dar. In den meisten Fällen ist ein Isolationsgrad von ca. 80% ausreichend und auch mit vertretbarem technischem Aufwand zu erreichen.

Formelzeichen:

- m Masse
- b Dämpfungskonstante
- D Lehr'sches Dämpfungsmaß
- c Federsteifigkeit
- x Schwingweg
- F_0 Amplitude der Erregerkraft
- F_L Amplitude der Auflagerkraft
- ω Kreisfrequenz ($\omega = 2 \pi n$)
- n_0 Eigenfrequenz des ungedämpften Systems
- n_{err} Erregerfrequenz
- λ Frequenzverhältnis ($\lambda = n_{\text{err}}/n_0$)
- s statische Einfederung
- i Isolationsgrad

Auswahl der Schwingungsdämpfer

Beispiel zur Lagerauswahl

Eine Maschine, die in einem Drehzahlbereich von 1 200 1/min bis 2 500 1/min arbeitet, soll schwingungs isoliert gelagert werden. Ziel ist es, höchstens 20% der in der Maschine wirkenden, durch Unwuchten hervorgerufenen, schwingungserregenden Kräfte ins Fundament einzuleiten (d. h. $i \geq 80\%$). Der Schwerpunkt liegt außermittig, so daß die 4 Lagerpunkte ungleichmäßig belastet werden. Dabei soll $a = 1000$ mm, $b = 450$ mm, $c = 800$ mm, $d = 320$ mm sein. Die Masse der Maschine beträgt 1000 kg, die Gewichtskraft G somit ca. 10 000 N.

Lösungsweg:

1. Ermittlung der für $i = 80\%$ notwendigen statischen Einfederung:

Die Übertragungsfunktion – Abb. 2 – zeigt, daß bei gleicher statischer Einfederung der Isolationsgrad mit kleinerer Erregerfrequenz schlechter wird. Deshalb ist immer die kleinste Erregerfrequenz zur Festlegung der erforderlichen statischen Einfederung heranzuziehen. Man erhält aus untenstehendem Diagramm bei $n = 1200$ 1/min für $i \geq 80\%$ als statische Einfederung $S \geq 3,7$ mm.

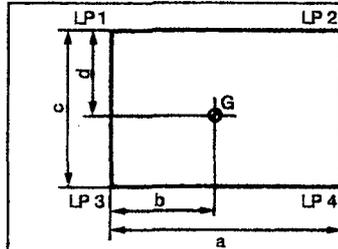


Abb. 3 Auslegungsbeispiel

2. Berechnung der statischen Lagerreaktionen

Berechnet man für die o. g. Abmessungen und die Gewichtskraft die Lagerkräfte (siehe Abb. 3), so erhält man:

$$\begin{aligned} F_1 &= 3300 \text{ N} \\ F_2 &= 2700 \text{ N} \\ F_3 &= 2200 \text{ N} \\ F_4 &= 1800 \text{ N} \end{aligned}$$

3. Auswahl geeigneter Lager

Aufgrund der gegebenen Lagerkräfte und der geforderten statischen Einfederung werden aus dem Katalog je nach Einbauraum, Befestigungswunsch oder -forderung die Lager ausgewählt. Im vorliegenden Beispiel soll die Maschine auf Maschinenlagern befestigt werden. Aus dem Katalog wird das Erzeugnis Nr. 5018 001 – vgl. S. 22 – ausgewählt.

$$LP1: F_1 = \left(1 - \frac{b}{a}\right) \left(1 - \frac{d}{c}\right) \cdot G$$

$$LP2: F_2 = \frac{b}{a} \cdot \left(1 - \frac{d}{c}\right) \cdot G$$

$$LP3: F_3 = \left(1 - \frac{b}{a}\right) \cdot \frac{d}{c} \cdot G$$

$$LP4: F_4 = \frac{b}{a} \cdot \frac{d}{c} \cdot G$$

Da die Belastungen unterschiedlich sind, werden unterschiedlich harte Lager eingesetzt.

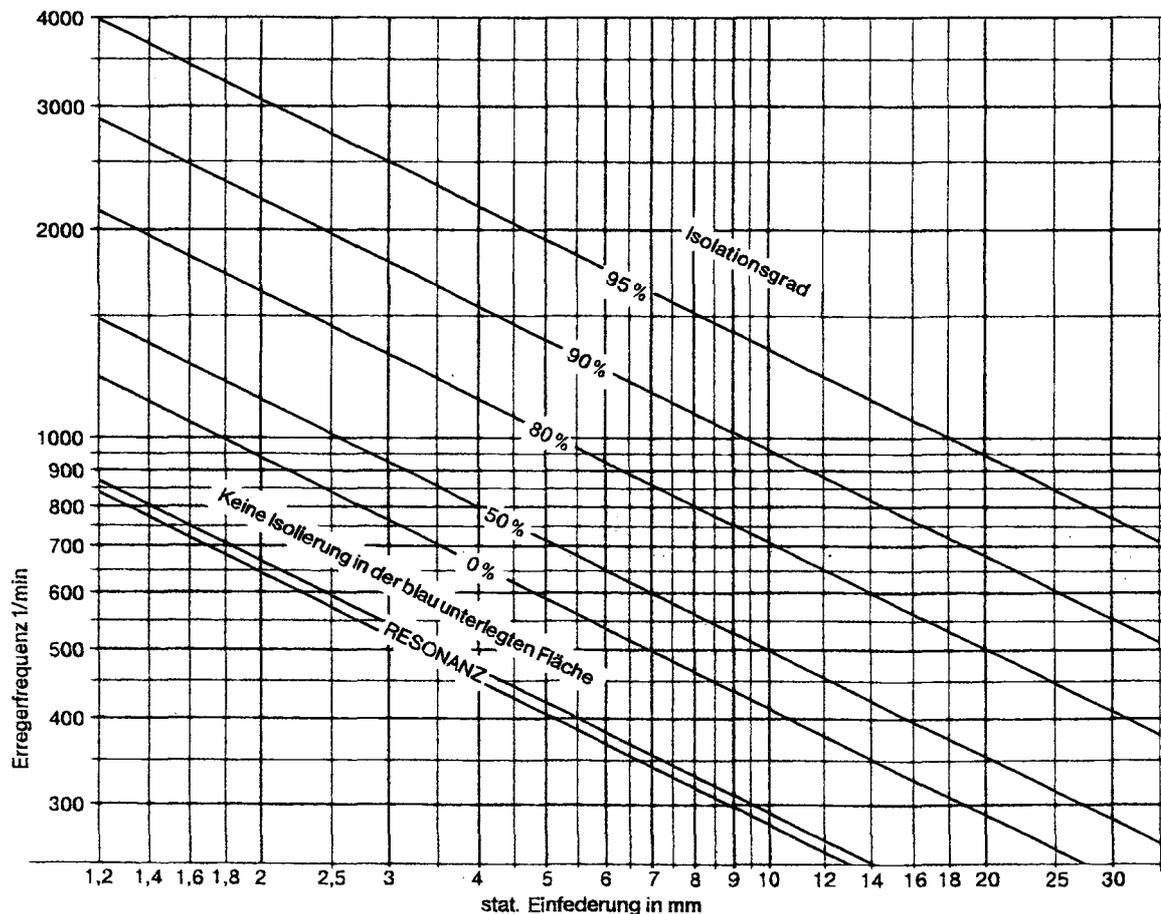
- für LP1 und LP2 Lager Typ A0
- für LP3 und LP4 Lager Typ A1

4. Nachprüfung des Isolationsgrades

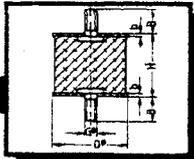
Anhand der in den Tabellen angegebenen max. Einfederungen und max. Belastungen oder aus den Diagrammen läßt sich die tatsächlich erreichte statische Einfederung bestimmen:

$$S \approx \frac{S_{\max}}{F_{\max}} \cdot F$$

Für die oben gewählte Lagerung erhält man je nach Lagerpunkt einen Isolationsgrad $i > 80\%$.



Auswahl der Schwingungsdämpfer



Freudenberg Rundlager Typ A

Erzeugnis-Nr.	Mischung CF	D mm	H mm	b mm	Gewinde	B mm	Nennwerte der Maximalbeträge			
							Schub		Druck	
							F _{max} N	s _{max} mm	F _{max} N	s _{max} mm
5218 242	11 MN 45	10	9	1	M 4	6	14	3	18	0,8
5218 129	11 MN 45	15	8	1	M 4	6/8	30	3	45	0,7
5218 058	11 MN 45	15	15	1	M 4	15	35	5	40	1,6
5218 057	11 MN 45	16	6	1,2	M 4	10	40	2	100	0,4
5218 039	11 MN 45	20	15	1,5	M 6	15	65	5	90	1,4
5218 149	11 MN 45	20	20	1,5	M 6	10	65	7	80	2,0
5218 061	11 MN 45	20	20	1,5	M 6	18,5	65	7	80	2,0
5218 095	11 MN 45	20	25	1,5	M 6	18,5	65	9	75	2,3
5218 132	11 MN 45	25	20	1,5	M 6	10	110	7	140	2,0
5218 086	11 MN 45	25	20	1,5	M 6	15	110	7	140	2,0
5218 125	11 MN 45	25	35	1,5	M 6	18,5	110	13	110	3,6
5218 151	11 MN 45	30	15	2	M 8	23	150	5	270	1,3
5218 099	11 MN 45	30	20	2	M 8	13	150	7	220	1,9
5218 163	11 MN 45	30	25	2	M 8	23	150	9	200	2,5
5218 067	11 MN 45	30	30	2	M 8	23	150	11	180	3,1
5218 123	11 MN 45	40	30	2,5	M 8	22,5	280	11	400	3,0
5218 070	11 MN 45	40	30	2,5	M 10	27,5	280	11	400	3,0
5218 153	11 MN 45	40	40	2,5	M 8	22,5	280	15	350	4,2
5218 089	11 MN 45	50	30	2,5	M 10	17,5	450	10	700	3,0
5218 040	11 MN 45	50	30	2,5	M 10	27,5	450	10	700	3,0
5218 072	11 MN 45	50	40	2,5	M 10	27,5	450	15	600	4,2
5218 174	11 MN 45	50	45	2,5	M 10	27,5	450	17	550	4,8
5218 110	11 MN 45	50	50	2,5	M 10	27,5	450	19	500	5,4
5218 206	11 MN 45	70	45	2,5	M 10	27,5	900	17	1400	4,8
5218 075	11 MN 45	70	60	3	M 12	37	900	22	1200	6,5
5218 078	11 MN 45	75	25	3	M 12	37	1000	8	2800	2,3
5218 272	11 MN 45	75	40	3	M 12	25	1000	14	1800	4,1
5218 210	11 MN 45	75	55	3	M 12	37	1000	20	1500	5,9
5218 113	11 MN 45	75	70	3	M 12	37	1000	26	1400	7,7
5218 131	11 MN 45	100	40	4	M 16	36	2000	14	4000	3,8
5218 016	11 MN 45	100	40	4	M 16	46	2000	14	4000	3,8
5218 100	11 MN 45	100	55	4	M 16	46	2000	20	3000	5,6
5218 083	11 MN 45	100	75	4	M 16	46	2000	28	2600	8,0
5218 242	11 MN 60	10	9	1	M 4	6	40	4	50	0,7
5218 129	11 MN 60	15	8	1	M 4	6/8	80	3	100	0,6
5218 058	11 MN 60	15	15	1	M 4	15	80	6	90	1,5
5218 057	11 MN 60	16	6	1	M 4	10	100	2	150	0,5
5218 039	11 MN 60	20	15	1,5	M 6	15	140	6	180	1,5
5218 149	11 MN 60	20	20	1,5	M 6	10	140	8	160	1,8
5218 061	11 MN 60	20	20	1,5	M 6	18,5	140	8	160	1,8
5218 095	11 MN 60	20	25	1,5	M 6	18,5	140	11	160	2,4
5218 132	11 MN 60	25	20	1,5	M 6	10	220	9	240	1,8
5218 086	11 MN 60	25	20	1,5	M 6	15	220	9	240	1,8
5218 050	11 MN 60	25	30	1,5	M 6	18,5	220	12	220	3,0
5218 125	11 MN 60	25	35	1,5	M 6	18,5	220	15	220	3,2
5218 151	11 MN 60	30	15	2	M 8	23	300	6	500	1,1
5218 099	11 MN 60	30	20	2	M 8	13	300	8	400	1,6
5218 051	11 MN 60	30	20	2	M 8	23	300	8	400	1,6
5218 163	11 MN 60	30	25	2	M 8	23	300	10	380	2,4
5218 067	11 MN 60	30	30	2	M 8	23	300	13	350	2,8
5218 123	11 MN 60	40	30	2,5	M 8	22,5	600	12	700	2,8
5218 018	11 MN 60	40	30	2,5	M 10	17,5	600	12	700	2,8
5218 070	11 MN 60	40	30	2,5	M 10	27,5	600	12	700	2,8
5218 153	11 MN 60	40	40	2,5	M 8	22,5	600	16	650	4,0
5218 168	11 MN 60	40	40	2,5	M 8	27,5	600	16	650	4,0
5218 116	11 MN 60	40	40	2,5	M 10	27,5	600	16	650	4,0
5218 232	11 MN 60	50	20	2,5	M 10	27,5	900	7	1800	1,7
5218 089	11 MN 60	50	30	2,5	M 10	17,5	900	11	1300	2,7
5218 040	11 MN 60	50	30	2,5	M 10	27,5	900	11	1300	2,7
5218 104	11 MN 60	50	40	2,5	M 10	17,5	900	15	1100	4,0
5218 072	11 MN 60	50	40	2,5	M 10	27,5	900	15	1100	4,0
5218 174	11 MN 60	50	45	2,5	M 10	27,5	900	17	1000	4,2
5218 110	11 MN 60	50	50	2,5	M 10	27,5	900	20	1000	4,5
5218 273	11 MN 60	60	45	2,5	M 10	19,5	1300	18	1600	4,5
5218 206	11 MN 60	70	45	2,5	M 10	27,5	1800	18	2400	4,5
5218 075	11 MN 60	70	60	3	M 12	37	1800	25	2100	6,0
5218 078	11 MN 60	75	25	3	M 12	37	2100	9	4500	2,0
5218 196	11 MN 60	75	40	3	M 12	37	2100	16	3000	3,7
5218 052	11 MN 60	75	50	3	M 12	37	2100	20	2400	4,8
5218 210	11 MN 60	75	55	3	M 12	37	2100	22	2400	5,3
5218 113	11 MN 60	75	70	3	M 12	37	2100	27	2000	6,5
5218 016	11 MN 60	100	40	4	M 16	46	3800	15	7000	3,5
5218 100	11 MN 60	100	55	4	M 16	46	3800	21	5000	5,4
5218 083	11 MN 60	100	75	4	M 16	46	3800	32	4200	7,5
5218 159	11 MN 60	160	75	4	M 16	46	10000	32	15000	8,0
5218 113	11 MN 80	75	70	3	M 12	37	5000	30	6000	7,2
5218 100	11 MN 70	100	55	4	M 16	46	7000	25	9000	5,4
5218 178	11 MN 70	160	114	6 u. 4x3	M 16	44	10000	28	10000	6,5

F_{max} = maximal zulässige Kraft pro Lager

s_{max} = Einfeldung unter maximaler Belastung.