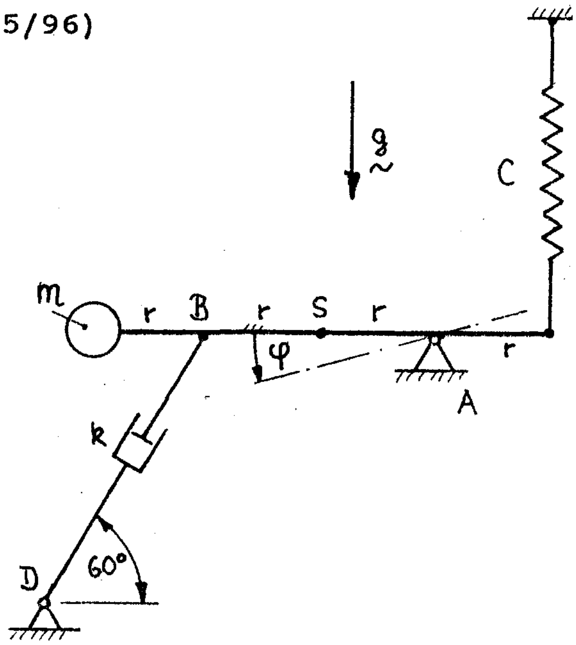
Name, Vorname:
Matrikel-Nr.:

Fachhochschule Mannheim Fachbereich Maschinenbau Prof. Dr.-Ing. H. Bräutigam	Maschinendynamik 1. Übung SS 2003	Freiwillige Übung Blatt 1/2

Aufgabe MD-FS1 20 (Abschlußklausur WS 95/96)

Das skizzierte System, bestehend aus einem **masselosen Stab** und einer **Punktmasse** (Masse m), kann Schwingungen φ um die statische Ruhelage $\varphi=0$ ausführen.

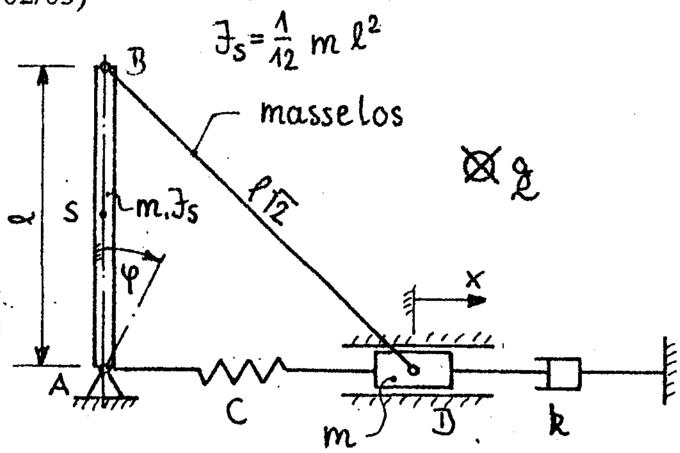


1. Man ermittle die **Federkraft F_0** in der statischen Ruhelage.
2. Für kleine Auslenkungen φ gebe man die **Bewegungsgleichung** an.
3. Wie groß darf die **Dämpferkonstante k** höchstens gewählt werden, damit das System gedämpfte **Schwingungen** ausführt?

Lösung: 1. $F_0 = 3mg$; 2. $\ddot{\varphi} + \frac{1}{3}\cdot\frac{k}{m}\cdot\dot{\varphi} + \frac{1}{9}\cdot\frac{C}{m}\cdot\varphi = 0$; 3. $k < 2\sqrt{C\cdot m}$.

Aufgabe MD-FS1 37 (Abschlussklausur WS 02/03)

Der in A drehbar gelagerte Stab AB (Masse m) ist über eine masselose Stange BD mit einem Gleitstein (Masse m) verbunden. An diesem greifen eine Dehnfeder (Federkonstante C, spannungslos für $\varphi=x=0$) und ein Dämpfer (Dämpferkonstante k) an. Es werden kleine Bewegungen vorausgesetzt.



1. Über die Geometrie ermittle man den Zusammenhang $x(\varphi)$.
2. Man gebe die Bewegungsgleichung des Systems in der φ-Koordinate an.
3. Man berechne die Federkonstante C und die Dämpferkonstante k, wenn folgendes bekannt ist:
   - ungedämpfte Eigenkreisfrequenz $\omega_0^2=100\ s^{-2}$
   - gedämpfte Eigenkreisfrequenz $\nu_0^2=90\ s^{-2}$
   - Masse m=30 kg

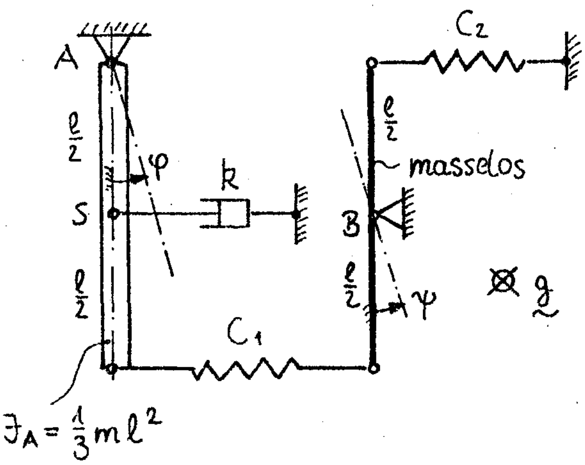
Lösung: 1. $x = \ell\varphi$; 2. $\ddot{\varphi} + \frac{3k}{4m}\dot{\varphi} + \frac{3C}{4m}\varphi = 0$; 3. $C = 4000\ \frac{N}{m}$, $k = 253\ \frac{kg}{s}$

Name, Vorname:
Matrikel-Nr.:

Fachhochschule Mannheim	Maschinendynamik	Freiwillige Übung
Fachbereich Maschinenbau	1. Übung	
Prof. Dr.-Ing. H. Bräutigam	SS 2003	Blatt 2/2

Aufgabe MD-FS1 33 (Abschlussklausur WS 00/01)

An dem in A drehbar gelagerten Stab der Masse m und Länge l greife ein Dämpfer (Dämpferkonstante k) und eine Feder (Federkonstante C_1) an. Diese Feder ist über eine masselose Stange der Länge l mit einer zweiten Feder (Federkonstante C_2) verbunden. Die Federn sind für $\varphi=\psi=0$ spannungslos.



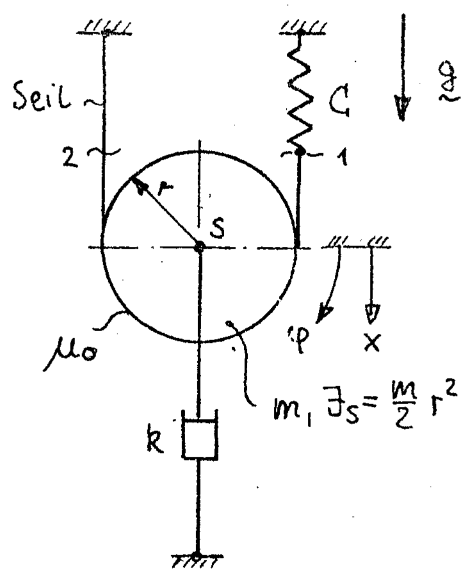
1. Unter der Voraussetzung kleiner Bewegungen φ und ψ schneide man Stab und Stange getrennt frei, und ermittle die Bewegungsgleichung des Stabes.

2. Mit den unten angegebenen Zahlenwerten berechne man das Lehrsche Dämpfungsmaß.
   Zahlenwerte: $C_1=C_2=6$ N/cm, $k=10$ kg/s,
   $m=2$ kg.

Lösung: 1. $\ddot{\varphi} + \frac{3k}{4m}\dot{\varphi} + \frac{3C_1C_2}{m(C_1+C_2)}\varphi = 0$ 2. $D = 0{,}088$

Aufgabe MD-FS1 36 (Abschlussklausur SS 2002)

Die federnd (Federkonstante C) und dämpfend (Dämpferkonstante k) aufgehängte Scheibe vermag Schwingungen auszuführen. Die stets vertikale Translation des Schwerpunktes S wird mit der x-Koordinate, die Rotation mit der φ-Koordinate beschrieben. Das Seil sei masselos und undehnbar. Zwischen Scheibe und Seil tritt kein Schlupf auf (Rollbewegung Scheibe auf Seil).



1. Für die statische Ruhelage $x=\varphi=0$ ermittle man die in den gekennzeichneten Abschnitten 1 und 2 wirkenden Seilkräfte.

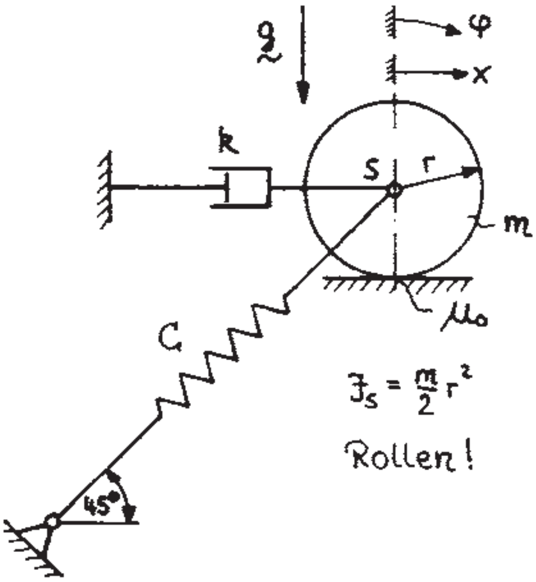
2. Man gebe die Bewegungsgleichung der Scheibe in der x-Koordinate an.

3. Mit den Zahlenwerten
   $m=5$ kg, $C=40$ N/cm, $k=300$ Ns/m
   berechne man
   a) die ungedämpfte Eigenkreisfrequenz ω_0,
   b) die gedämpfte Eigenkreisfrequenz ν_0.

Lösung: 1. $S_1 = S_2 = \frac{1}{2} mg$. 2. $\ddot{x} + \frac{2k}{3m}\dot{x} + \frac{8C}{3m}x = 0$. 3. a) $\omega_0 = 46{,}2\,s^{-1}$, b) $\nu_0 = 41{,}6\,s^{-1}$

Aufgabe MD-FS1 15 (Abschlußklausur SS 94)

Die **Walze** der Masse m und Drehmasse J_S führt **kleine Schwingungsbewegungen** aus, wobei sie stets auf der Unterlage **abrollen** soll. Die Koordinate x beschreibt die Bewegung des Schwerpunktes, die Koordinate φ die Drehung um den Schwerpunkt. In der skizzierten statischen Ruhelage $x=\varphi=0$ ist die Feder C spannungslos.



1. Für kleine Schwingungen gebe man die **Bewegungsgleichung der Walze** in der Koordinate x an.

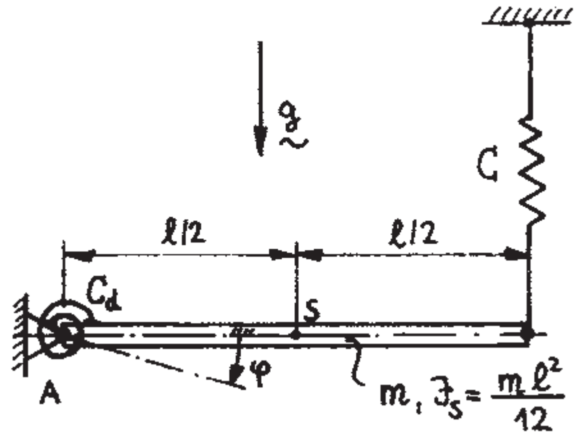
2. Wie groß muß die **Dämpferkonstante k** gewählt werden, damit sich Schwingungen mit gedämpfter Eigenkreisfrequenz $\nu_0=8\ s^{-1}$ einstellen?

   Zahlenwerte hierfür: C=150 N/cm, m=20 kg.

Lösung: 1. $\ddot{x} + \frac{2}{3}\frac{k}{m}\dot{x} + \frac{1}{3}\frac{c}{m}x = 0$; 2. $k = 818{,}3$ kg/s

Aufgabe MD-FS1 28 (Abschlussklausur SS 99)

Der Stab der Länge l ist in A frei drehbar gelagert. In der skizzierten statischen Ruhelage (φ=0) sind sowohl die Drehfeder (Drehfederkonstante C_d) als auch die Dehnfeder (Dehnfederkonstante C) vorgespannt.



1. Für die statische Ruhelage berechne man das Vorspannmoment M_0 der Drehfeder, wenn für die Vorspannkraft der Dehnfeder F_0=mg/3 (Zugkraft) gilt.

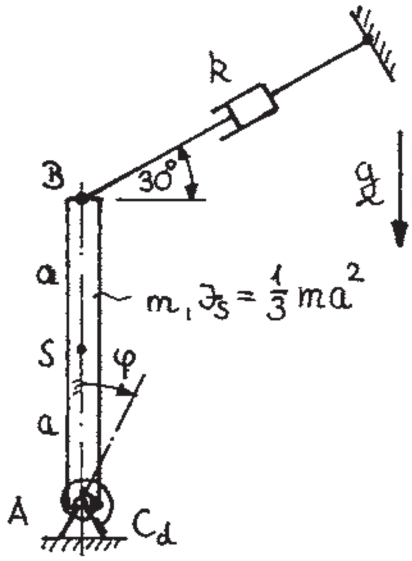
2. Für kleine Auslenkungen φ ermittle man die Bewegungsgleichung.

3. Wie groß muß C_d gewählt werden, damit die Eigenkreisfrequenz ω_0=45 s^{-1} beträgt ?
   Zahlenwerte hierfür:
   m=4 kg, l=1 m, C=2 N/mm.

Lösung: 1. $M_0 = \frac{1}{6} m g l$. 2. $\ddot{\varphi} + \frac{3}{m l^2}(C_d + C l^2)\varphi = 0$. 3. $C_d = 700$ Nm .

Aufgabe MD-FS1 34 (Abschlussklausur SS 01)

Der Stab der Länge 2a ist in A frei drehbar gelagert. Die Drehfeder (Drehfederkonstante C_d) sei für φ=0 spannungslos. In B greift ein linear viskoser Dämpfer (Dämpferkonstante k) an.



1. Für kleine Auslenkungen φ ermittle man die Bewegungsgleichung.

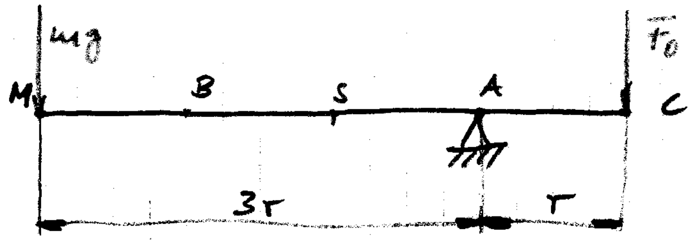
2. Mit den Zahlenwerten
   m=30 kg, a=400 mm, C_d=300 Nm, k=20Ns/m
   berechne man:
   - die ungedämpfte Eigenkreisfrequenz ω_0,
   - die gedämpfte Eigenkreisfrequenz ν_0,
   - das Lehrsche Dämpfungsmaß D.

Lösung: 1. $\ddot{\varphi} + \frac{9}{4}\cdot\frac{k}{m}\cdot\dot{\varphi} + \frac{3}{4}\left(\frac{C_d}{m a^2} - \frac{g}{a}\right)\varphi = 0$

2. $\omega_0 = 5{,}34\ s^{-1}$, $\nu_0 = 5{,}28\ s^{-1}$, $D = 0{,}140$

MD-FS1 20:

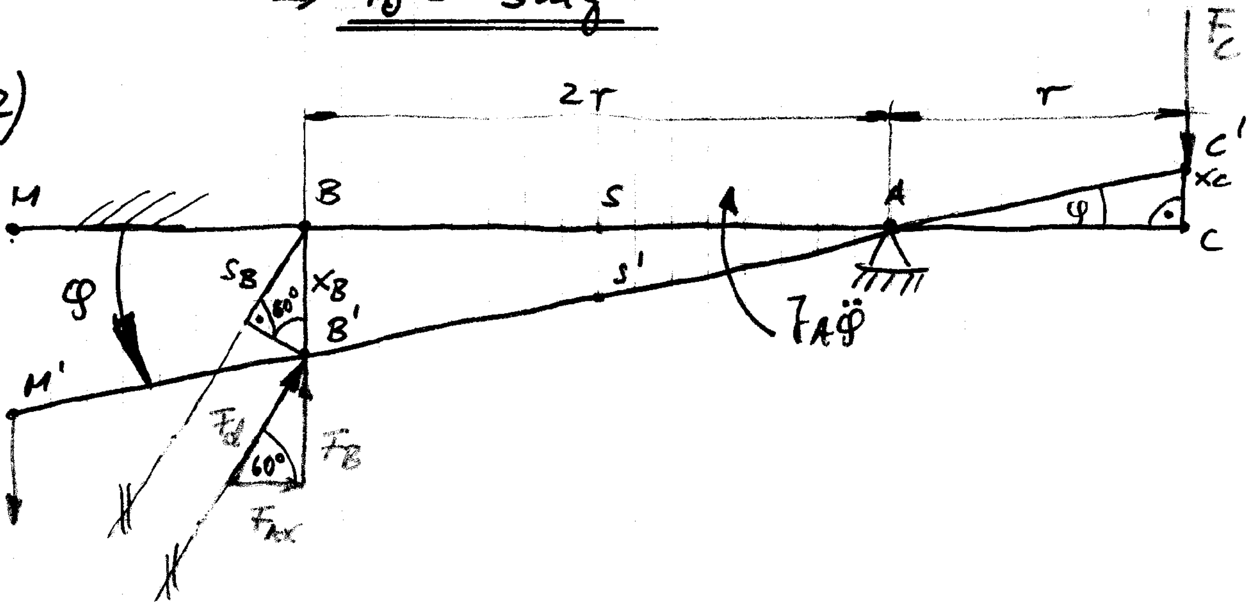
1)



$$\sum M_A = 0 = mg \cdot 3\cancel{r} - F_0 \cdot \cancel{r}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{F_0 = 3mg}}$$

2)



$$\underline{\sum M_A = 0 = 3mgr - J_A\ddot{\varphi} - F_C \cdot r - F_B \cdot 2r}$$

$$J_A = m \cdot (3r)^2 \underline{\underline{= 9mr^2}}$$

$$F_C = F_0 + c\,x_C; \quad \tan\varphi = \frac{x_C}{r} \Rightarrow x_C = r\tan\varphi$$

$$\varphi \ll 1 \Rightarrow \tan\varphi \approx \varphi \Rightarrow x_C \approx r\varphi;\ x_B \approx 2r\varphi$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{F_C = 3mg + cr\varphi}}$$

$$\sin 60° = \frac{s_B}{x_B} \Rightarrow s_B = x_B \sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2} x_B = \sqrt{3}\,r\varphi$$

$$F_d = \dot{s}_B \cdot k = \sqrt{3}\,kr\dot{\varphi}; \quad \sin 60° = \frac{F_B}{F_d} \Rightarrow F_B = F_d \sin 60°$$

$$\Rightarrow F_B = \sqrt{3}\,kr\dot{\varphi} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \underline{\underline{\frac{3}{2}kr\dot{\varphi}}}$$

$$\Rightarrow 0 = \cancel{3mgr} - 9mr^2\ddot{\varphi} - \cancel{3mgr} - cr^2\varphi - 3kr^2\dot{\varphi} \Big| \cdot \frac{-1}{9mr^2}$$

$$\underline{\underline{\text{BGL:} \quad 0 = \ddot{\varphi} + \frac{1}{3} \cdot \frac{k}{m}\dot{\varphi} + \frac{1}{9} \cdot \frac{c}{m} \cdot \varphi}}$$

3) Interpretation DGL: $2\delta = \frac{k}{3m}$; $\omega_0^2 = \frac{c}{9m}$

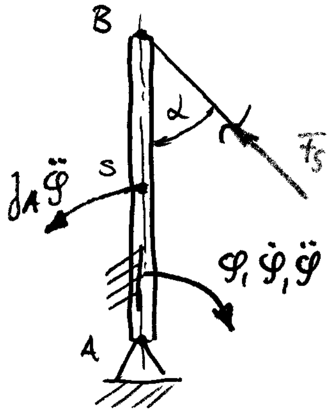
Aperiod. Grenzfall: $\delta^2 \overset{!}{=} \omega_0^2$

$$\Rightarrow \left(\frac{k}{\cancel{6m}_{2}}\right)^2 \overset{!}{=} \frac{c}{\cancel{9m}} \cdot m$$

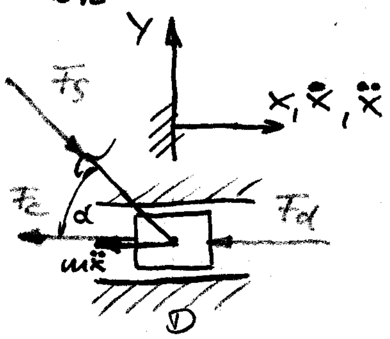
$$\Rightarrow k^2 \overset{!}{=} 4cm$$

gedämpfte Schw.: $\boxed{k < 2\sqrt{cm}}$

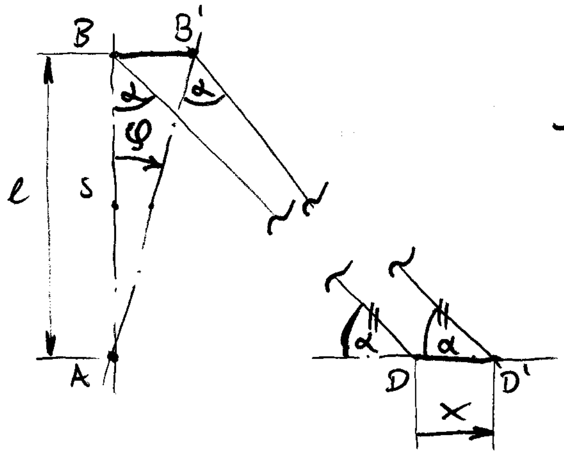
MD-FS1 37



$$\sin\alpha = \frac{l}{l\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \underline{\underline{\alpha = 45^\circ}}$$



1.)



für $\varphi \to 0$ gilt:

$l\varphi \to \overline{BB'}$; $\overline{BB'} \to \overline{DD'}$

mit $\overline{DD'} = x \Rightarrow l\varphi \to x$

$\Rightarrow$ für kleine Bewegungen:

$$\underline{\underline{x(\varphi) = l\varphi}}$$

2.) $\sum M_A = 0 = -J_A\ddot{\varphi} - F_S\, l \sin 45^\circ$

$$\underline{\sum F_{Dx} = 0 = -F_c + F_S \cdot \sin 45^\circ - F_d - m\ddot{x}}$$

$$\Rightarrow F_S = \frac{F_d + m\ddot{x} - F_c}{\sin 45^\circ}$$

$$\Rightarrow 0 = -J_A\ddot{\varphi} - \frac{F_d + m\ddot{x} + F_c}{\cancel{\sin 45^\circ}} \cdot l\,\cancel{\sin 45^\circ};$$

$$J_A = J_S + m\frac{l^2}{4} = \frac{1}{12}ml^2 + \frac{3}{12}ml^2 \underline{= \frac{1}{3}ml^2}$$

$$F_c = Cx \underline{= Cl\varphi}; \quad F_d = k\dot{x} \underline{= kl\dot{\varphi}}; \quad m\ddot{x} \underline{= ml\ddot{\varphi}}$$

$$\Rightarrow 0 = -\frac{1}{3}ml^2\ddot{\varphi} - ml^2\ddot{\varphi} - kl^2\dot{\varphi} - Cl^2\varphi \quad \Big| \frac{1}{l^2}$$

$$0 = -\frac{4}{3}m\ddot{\varphi} - k\dot{\varphi} - C\varphi \quad \Big| -\frac{3}{4m}$$

DGL: $\underline{\underline{0 = \ddot{\varphi} + \frac{3k}{4m}\dot{\varphi} + \frac{3C}{4m}\varphi}}$ (homogene DGL 2. Ordn.)

3.) Interpretation der DGL:

$$\ddot{\varphi} + 2\delta\dot{\varphi} + \omega_0^2\varphi = 0 \quad \Rightarrow \text{gedämpfte Schwingung}$$

Koeffizientenvergleich:

$$\omega_0^2 = \frac{3c}{4m} \quad \Rightarrow \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{3c}{4m}}$$

$$2\delta = \frac{3k}{4m} \quad \Rightarrow \quad k = \frac{8\delta m}{3}$$

$$\Rightarrow c = \frac{4\omega_0^2 m}{3} = \frac{4 \cdot 100 \cdot \overset{10}{\cancel{30}}\,kg}{\cancel{3}\,s^2} = 4000\,\frac{\cancel{kg}}{\cancel{s^2}} \cdot \frac{N\cancel{s^2}}{\cancel{kg}\,m} = 4000\,\frac{N}{m}$$

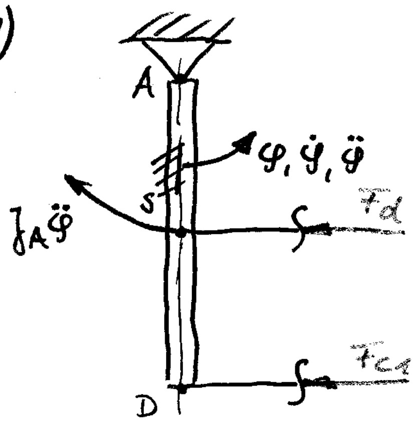
$$\nu_0^2 = \omega_0^2 - \delta^2 \quad \Rightarrow \quad \delta = \sqrt{\omega_0^2 - \nu_0^2}$$

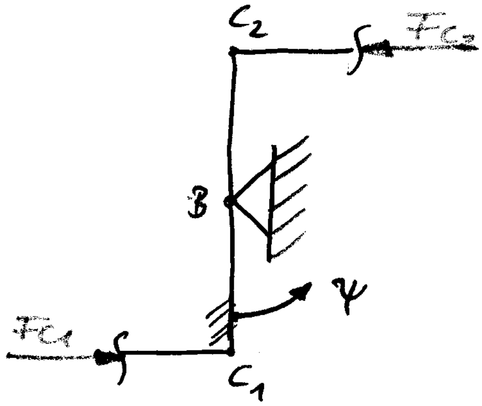
$$\Rightarrow k = \frac{8\sqrt{\omega_0^2 - \nu_0^2}\,m}{3} = \frac{8\sqrt{100-90}\cdot \overset{10}{\cancel{30}}\,kg}{\cancel{3}\,s} = 252{,}98\,\frac{kg}{s}$$

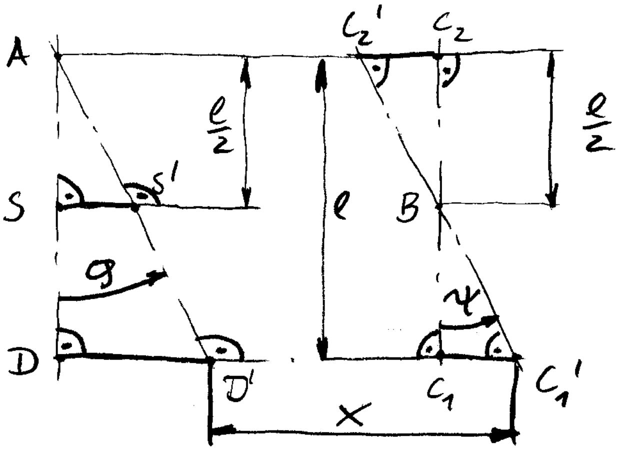
$$\Rightarrow k = 253\,\frac{N}{\frac{m}{s}}$$

MD-FS1 33:

1)







Für $\varphi \to 0$ gilt:

$l\varphi \to \overline{DD'}$; $\frac{l}{2}\varphi \to \overline{SS'}$; $\frac{l}{2}\psi \to \overline{C_1C_1'} = \overline{C_2C_2'}$

$\Rightarrow$ für kleine Bewegungen:

$l\varphi = \overline{DD'} = 2\overline{SS'}$; $\frac{l}{2}\psi = \overline{C_1C_1'} = \overline{C_2C_2'}$;

mit $\overline{DD'} - \overline{C_1C_1'} = \Delta x \Rightarrow \Delta x = l\varphi - \frac{l}{2}\psi$

$$\Sigma M_A = 0 = -J_A\ddot{\varphi} - F_d\frac{l}{2} - F_{c1}l$$

$$\Sigma M_B = 0 = F_{c1}\frac{l}{2} - F_{c2}\frac{l}{2}$$

$$\Rightarrow F_{c1}\frac{l}{2} = F_{c2}\frac{l}{2} \Rightarrow F_{c1} = F_{c2};$$

$$F_{c1} = c_1 \cdot \Delta x = c_1\left(l\varphi - \frac{l}{2}\psi\right);$$

$$F_{c2} = c_2 \cdot \frac{l}{2}\psi \Rightarrow \psi = \frac{2}{c_2 l}F_{c2} = \frac{2}{c_2 l}F_{c1}$$

$$\Rightarrow F_{c1} = c_1 l \varphi - c_1 \frac{l}{2} \psi$$

$$\Rightarrow F_{c1} = c_1 l \varphi - c_1 \frac{\cancel{l}}{\cancel{2}} \cdot \frac{\cancel{2}}{c_2 \cancel{l}} F_{c1} = c_1 l \varphi - \frac{c_1}{c_2} F_{c1}$$

$$\Rightarrow \left(1 + \frac{c_1}{c_2}\right) F_{c1} = c_1 l \varphi$$

$$\Rightarrow \quad \underline{F_{c1} = \frac{c_1 c_2 l}{c_1 + c_2} \varphi} \; ;$$

$$\underline{J_A = \frac{1}{3} m l^2} \; ; \quad \underline{F_d = k \frac{l}{2} \dot{\varphi}}$$

$$\Rightarrow 0 = -\frac{1}{3} m l^2 \ddot{\varphi} - k \frac{l^2}{4} \dot{\varphi} - \frac{c_1 c_2 l^2}{c_1 + c_2} \varphi$$

$$\Rightarrow 0 = -\frac{1}{3} \ddot{\varphi} - \frac{k}{4m} \dot{\varphi} - \frac{c_1 c_2}{m(c_1 + c_2)} \varphi$$

$$\Rightarrow \text{BGL: } \underline{0 = \ddot{\varphi} + \frac{3k}{4m} \dot{\varphi} - \frac{3 c_1 c_2}{m(c_1 + c_2)} \varphi} \quad \text{(homog. DGL 2. Ordn.)}$$

2.) Interpretation der DGL:

$$0 = \ddot{\varphi} + \underbrace{2\delta}_{2D\omega_0} \dot{\varphi} + \omega_0^2 \varphi$$

Koeffizientenvergleich:

$$\underline{\omega_0 = \sqrt{\frac{3 c_1 c_2}{m(c_1 + c_2)}}} \; ;$$

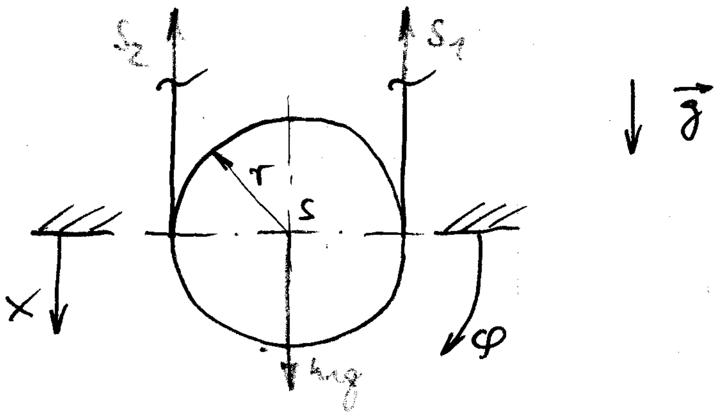
$$2D\omega_0 = \frac{3k}{4m} \quad \Rightarrow \quad \underline{D = \frac{3k}{8m\omega_0}}$$

$$\Rightarrow D = \frac{3k}{8m} \sqrt{\frac{m(c_1 + c_2)}{3 c_1 c_2}} = \sqrt{\frac{\cancel{9}\,3 k^2 \cancel{m} (c_1 + c_2)}{64 m^{\cancel{2}} \cdot \cancel{3}\, c_1 c_2}} = \sqrt{\frac{3 k^2 (c_1 + c_2)}{64 m c_1 c_2}}$$

$$D = \sqrt{\frac{3 \cdot 10^2 \, kg^{\cancel{2}} (6 + 6) \cancel{N} \frac{m}{cm^{\cancel{2}}}}{64 \cdot 2 \cancel{kg} \cdot s^2 \cdot 6 \cdot 6 N^{\cancel{2}} cm \, 100}} = 0{,}0884 \sqrt{\frac{kg\,m}{s^2 N}} = \underline{\underline{0{,}0884}}$$

MD – FS1 36:

1)



$$\sum M_S = 0 = S_2 r - S_1 r$$

$$\sum F_x = 0 = -S_2 + mg - S_1$$

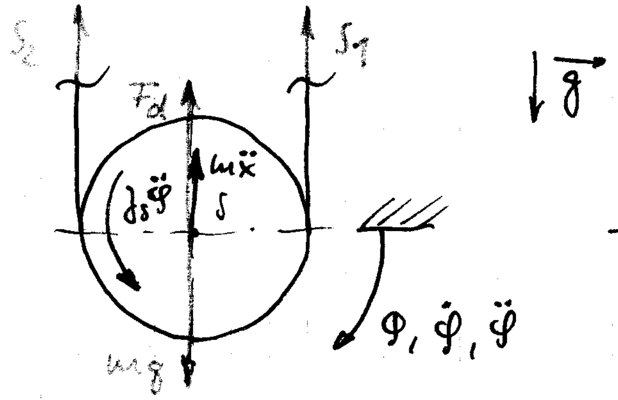
$$\Rightarrow \underline{S_2 = S_1}$$

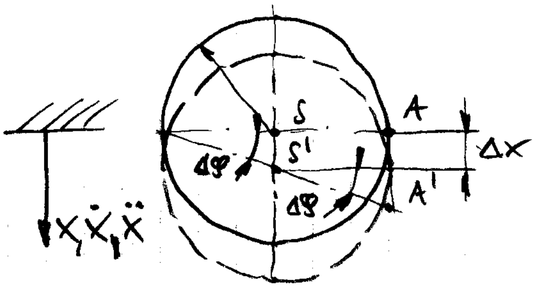
$$\Rightarrow -S_1 + mg - S_1 = 0$$

$$\Rightarrow 2S_1 = mg$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{S_1 = S_2 = \tfrac{1}{2}mg}}$$

2)





$$\overline{SS'} = \Delta x = r\Delta\varphi \Rightarrow \Delta\varphi = \frac{\Delta x}{r} \Rightarrow \underline{\varphi = \frac{x}{r}} \;;$$

$$\overline{AA'} = \overline{SS'} + r\Delta\varphi = 2r\Delta\varphi = 2r\frac{\Delta x}{r} = 2\Delta x$$

$$\Rightarrow \underline{\overline{A_0A_1} = 2x}$$

$$\sum M_S = 0 = S_2 r - S_1 r - J_S\ddot{\varphi}$$

$$\underline{\sum F_x = 0 = -S_2 - S_1 - m\ddot{x} + mg - F_d}$$

$$\Rightarrow S_2 r = S_1 r + J_S\ddot{\varphi} \;; \quad J_S = \frac{m}{2}r^2 \;; \; \ddot{\varphi} = \frac{\ddot{x}}{r}$$

$$\Rightarrow S_2 \cancel{r} = S_1 \cancel{r} + \frac{m}{2} r^{\cancel{2}} \frac{\ddot{x}}{\cancel{r}}$$

$$\Rightarrow \underline{S_2 = S_1 + \frac{m}{2}\ddot{x}}$$

$$\Rightarrow 0 = -S_1 - \frac{m}{2}\ddot{x} - S_1 - m\ddot{x} + mg - F_d ;$$

$$S_1 = C \cdot \overline{A_0A_1} + \frac{1}{2}mg = 2Cx + \frac{1}{2}mg ; \quad F_d = k\dot{x}$$

$$\Rightarrow 0 = -\frac{3m}{2}\ddot{x} - k\dot{x} - 4Cx \cancel{-mg} \cancel{+mg}$$

$$\Rightarrow \text{BGL: } \underline{\underline{0 = \ddot{x} + \frac{2k}{3m}\dot{x} + \frac{8C}{3m}x}} \quad \text{(homogene DGL 2. Ordn.)}$$

3.) Interpretation der DGL:

$$0 = \ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x$$

Koeffizientenvergleich:

$$2\delta = \frac{2k}{3m}$$

$$\Rightarrow \underline{\delta = \frac{k}{3m}}$$

$$\underline{\omega_0 = \sqrt{\frac{8C}{3m}}}$$

a) $$\omega_0 = \sqrt{\frac{8 \cdot 40\,\cancel{kg} \cdot \cancel{m} \cdot 100}{\cancel{m} \cdot s^2 \cdot 3 \cdot 5\,\cancel{kg}}} = \underline{\underline{46{,}188\ \frac{1}{s}}}$$

b) $$\nu_0 = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} = \sqrt{\frac{8C}{3m} - \frac{k^2}{9m^2}} = \frac{\sqrt{24Cm - k^2}}{3m}$$

$$\nu_0 = \frac{\sqrt{24 \cdot 40\,\cancel{kg}\, s^{-2} \cdot 100 \cdot 5\,\cancel{kg} - 300^2\,\cancel{kg^2} \cdot s^{-2}}}{3 \cdot 5\,\cancel{kg}} = \underline{\underline{41{,}633\ \frac{1}{s}}}$$