Klausur Mathematik 2

Semester V2
SS 2000

Dozentin: Chr.Vandaele

Name: **Matr. Nr.**:

Punkte: **Note**:

Bearbeitungszeit: 120 Minuten

Hilfsmittel: Taschenrechner, Formelsammlung, Vorlesungsmitschrift.

Aufgabe 1

Lösen Sie folgende Differentialgleichungen:

a) $y''-y = xe^x + e^{2x}$

b) $\frac{y'}{1-2x} = \frac{1}{3y^2}, \quad y(3) = 2$

c) $y^{(4)} - 8y''+7y = 0$

d) $y''+y = \frac{1}{\cos x}$

Aufgabe 2

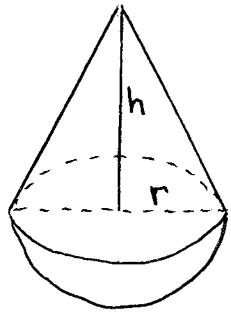
a) Berechnen Sie das folgende Integral durch Reihenentwicklung: $\int_{1/4}^{1} x \sin\sqrt{x}\,dx$

b) Bestimmen Sie von der Funktion $f(x) = \sqrt{1+x}, x > -1$ das Taylorpolynom dritten Grades an der Entwicklungsstelle $x_0 = 0$.
Bestimmen Sie mit Hilfe von $T_3(x)$ näherungsweise die Zahl $\sqrt{2}$.

c) Bestimmen Sie den Konvergenzradius der folgenden Potenzreihe

$$\frac{x}{2} + \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^3}{2^3} + \frac{x^4}{2^4} + \cdots$$

Aufgabe 3



Das Volumen des nebenstehenden Kreisels
(Halbkugel + Kegel) beträgt

$$V(r,h) = \frac{2}{3} \cdot \pi \cdot r^3 + \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h$$

a) Stellen Sie die Formel für das totale Differential auf.

b) Es sind $h = 18$ cm und $r = 9$ cm gegeben. Berechnen Sie mit Hilfe von a), wie r abgeändert werden muß, damit das Volumen bei einer Vergrößerung von h um 0,5 ungefähr gleich bleibt.

Aufgabe 4

Berechnen Sie die Extremstellen von $z = f(x,y) = x^2(e^y - 2) - y^2$

Aufgabe 5

Gesucht ist der höchste und tiefste Punkt auf der Ebene $x + 2y + z - 20 = 0$, der gleichzeitig auf dem durch $x^2 + y^2 = 25$ beschriebenen Zylinder liegt.

Aufgabe 6

Es sei $f(x,y) = xy$. G gegeben durch $x \geq 0, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq 2, y \leq x^2$
Skizzieren Sie das Gebiet G.
Berechnen Sie das Volumen $\iint_G f \, dg$.

Aufgabe 7

Ein Körper wird durch die Flächen $x + z = 2$, $x^2 + y^2 = 4$ und $z = 0$ begrenzt.
Die Dichte beträgt $\rho(x,y,z) = 3y^2$.
Welche Masse besitzt der Körper?

Aufgabe 8

Aus einem Hohlzylinder mit dem inneren Radius $R_1 = 1$ und dem äußeren Radius $R_2 = 4$, der unten durch die x,y-Ebene und oben durch die Fläche $z = \frac{x+y}{x^2+y^2}$ begrenzt wird, schneiden die Ebenen $y = \frac{1}{\sqrt{3}}x$ und $y = \sqrt{3}x$, $(x > 0, y > 0)$ ein Segment aus.

Wie groß ist das Volumen dieses Segments?

Aufgabe 9

Gegeben ist das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 &= 6 \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 &= 4 \\ 4x_1 + x_2 + ax_3 &= 16a \end{aligned}$$

mit einer Konstanten a.
Für welches a gibt es unendlich viele Lösungen, für welche a gibt es genau eine Lösung?
Geben Sie die jeweiligen Lösungen an.

Aufgabe 10

Gegeben ist die Matrix $X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

a) Berechnen Sie das Produkt $X^T \cdot X$

b) Zeigen Sie, daß für die Matrix $A = \frac{1}{14} \cdot \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ gilt $A^{-1} = X^T \cdot X$

Aufgabe 11

Für welche Werte von t wird die Determinante Null?

$$\begin{vmatrix} 3-t & 1 & 1 \\ 2 & 4-t & 2 \\ 1 & 1 & 3-t \end{vmatrix}$$