Fachhochschule Mannheim Fachbereich Maschinenbau Prof. Dr.-Ing. H. Bräutigam	Literaturverzeichnis	Technische Mechanik Kinetik

- Hauger, Schnell, Gross, Technische Mechanik, Band 3, Kinetik, Springer-Verlag

- Hauger, Lippmann, Mannl, Aufgaben zu Technische Mechanik 1-3, Statik, Elastostatik, Kinetik, Springer-Verlag

- Holzmann, Meyer, Schumpich, Technische Mechanik, Teil 2, Kinematik und Kinetik, B.G. Teubner

- E. Brommundt, G. Sachs, Technische Mechanik, Eine Einführung, Springer-Verlag

- Gloistehn, Lehr- und Übungsbuch der Technischen Mechanik, Band 3, Kinematik, Kinetik, Vieweg-Verlag Braunschweig/Wiesbaden

- Martin Mayr, Technische Mechanik, Statik, Kinematik-Kinetik-Schwingungen, Festigkeitslehre, Carl Hanser Verlag München Wien

- Martin Mayr, Mechanik-Training, Übungsbeispiele und Prüfungsaufgaben, Statik, Kinematik-Kinetik-Schwingungen, Festigkeitslehre, Carl Hanser Verlag München Wien

- Hardtke/Heimann/Sollmann, Lehr- und Übungsbuch Technische Mechanik, Band II, Kinematik/Kinetik-Systemdynamik-Mechatronik, Fachbuchverlag Leipzig im Carl Hanser Verlag

Fachhochschule Mannheim Fachbereich Maschinenbau Prof. Dr.-Ing. H. Bräutigam	**Formelsammlung**	**Technische Mechanik** **Kinetik** Blatt K1

Thema: Kinematik des Punktes

Formelsammlung:

Auswertung von Lage $\underset{\sim}{r}(t)$
Geschwindigkeit $\underset{\sim}{v}(t) = \dot{\underset{\sim}{r}}(t)$ und
Beschleunigung $\underset{\sim}{a}(t) = \dot{\underset{\sim}{v}}(t) = \ddot{\underset{\sim}{r}}(t)$
in verschiedenen Koordinatensystemen:

a) kartesische Koordinaten (ortsfest): Einheitsvektoren $\underset{\sim}{e}_x, \underset{\sim}{e}_y, \underset{\sim}{e}_z$

$$\underset{\sim}{r}(t) = x \cdot \underset{\sim}{e}_x + y\underset{\sim}{e}_y + z\underset{\sim}{e}_z = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

$$\dot{\underset{\sim}{r}}(t) = \underset{\sim}{v}(t) = \dot{x}\underset{\sim}{e}_x + \dot{y}\underset{\sim}{e}_y + \dot{z}\underset{\sim}{e}_z = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix}$$

$$\ddot{\underset{\sim}{r}}(t) = \dot{\underset{\sim}{v}}(t) = \underset{\sim}{a}(t) = \ddot{x}\underset{\sim}{e}_x + \ddot{y}\underset{\sim}{e}_y + \ddot{z}\underset{\sim}{e}_z = \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{bmatrix}$$

b) Polarkoordinaten (mitdrehend): Einheitsvektoren $\underset{\sim}{e}_r, \underset{\sim}{e}_\varphi$

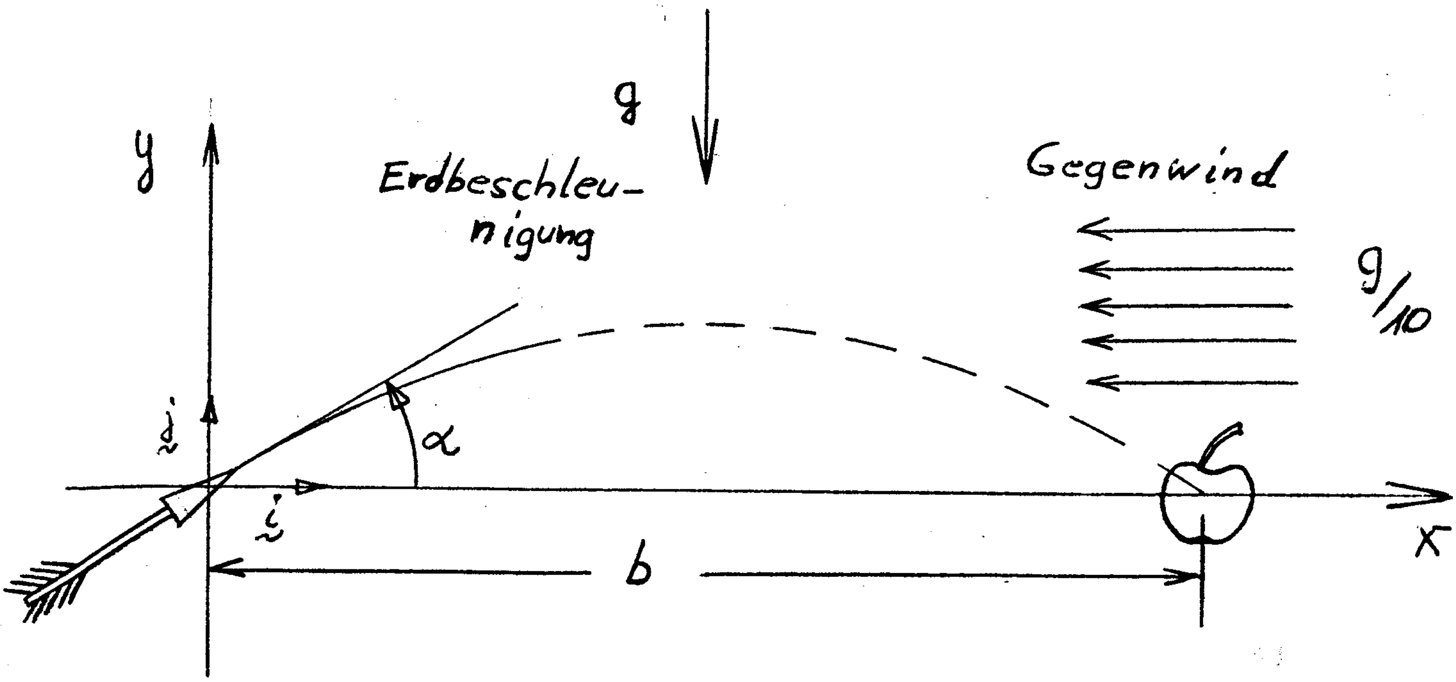
$$\underset{\sim}{r}(t) = r\underset{\sim}{e}_r$$

$$\dot{\underset{\sim}{r}}(t) = \underset{\sim}{v}(t) = \dot{r}\underset{\sim}{e}_r + r\dot{\varphi}\underset{\sim}{e}_\varphi$$

$$\ddot{\underset{\sim}{r}}(t) = \dot{\underset{\sim}{v}}(t) = \underset{\sim}{a}(t) = (\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2)\underset{\sim}{e}_r + (r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi})\underset{\sim}{e}_\varphi$$

Aufgaben: K-KIP*

Aufgabe K-KIP 1



Historiker berichten, daß Wilhelm Tell den Pfeil im Koordinatenursprung (x=y=o) abgeschossen hätte und der Apfel auf dem Kopf seines Knaben im Punkte P mit den Koordinaten x=b,Y=o angeordnet war. Da das Wetter an dem Tage nicht nur schön sondern auch windig gewesen sein soll, wirkte neben der Erdbeschleunigung g in negativer y-Richtung durch den Gegenwind eine Beschleunigung g/10 in negativer x-Richtung. Als ein Mann, der in den Mechanikübungen immer gut aufgepaßt hatte, soll Wilhelm Tell gewußt haben, daß er dem Pfeil betragsmäßig eine Geschwindigkeit v_o verleihen konnte.

1.) Man gebe den Beschleunigungsvektor $\underset{\sim}{a}$ im kartesischen x,y-Koordinatensystem an.

2.) Man berechne das Geschwindigkeits- und Weg-Zeitgesetz $\underset{\sim}{v}(t)$ bzw. $\underset{\sim}{r}(t)$ in diesen Koordinaten.

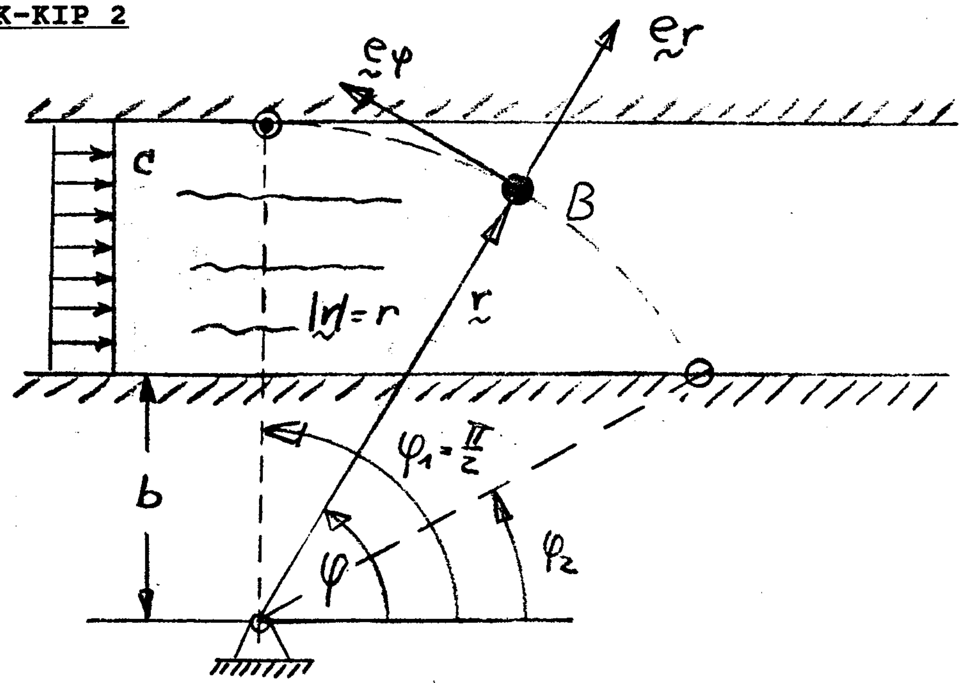
3.) Unter welchem Winkel α wurde der Pfeil abgeschossen, wenn Wilhelm Tell den Apfel - wie ja bekannt - , traf (es gelte $v_o^2/b = 10g/9$).

Lösung:

2. $\underset{\sim}{v} = \begin{pmatrix} -g \cdot \frac{t}{10} + v_0 \cos\alpha \\ -g \cdot t + v_0 \sin\alpha \end{pmatrix}$, $\underset{\sim}{r} = \begin{pmatrix} -g \frac{t^2}{20} + t \cdot v_0 \cos\alpha \\ -g \frac{t^2}{2} + t \cdot v_0 \sin\alpha \end{pmatrix}$

3. $\alpha_1 = 45^\circ$, $\alpha_2 = 39{,}5^\circ$ (2 Lösungen !)

Aufgabe K-KIP 2



Eine Boje B hängt an einem Seil der Länge r, welches im Abstand b = r/2 vom Flußufer befestigt ist. Unter dem Einfluß der Strömung schwimmt die Boje vom linken zum rechten Ufer, wobei das Seil stets gespannt bleibt und die Bojengeschwindigkeit mit dem in die Richtung der Bahntangente fallenden Anteil der konstanten Strömungsgeschwindigkeit c übereinstimmt.

1. Man stelle nacheinander Ortsvektor $\underset{\sim}{r}$, Geschwindigkeit $\underset{\sim}{v}$ und Beschleunigung $\underset{\sim}{a}$ für eine allgemeine Lage φ der Boje in Polarkoordinaten auf.

2. Man berechne die Zeit T, die die Boje zur Überquerung des Flusses benötigt.

Lösung:

1. $\underset{\sim}{r} = r \cdot \underset{\sim}{e}_r \quad , \quad \underset{\sim}{v} = -c \sin\varphi \, \underset{\sim}{e}_\varphi \quad , \quad \underset{\sim}{a} = \frac{c^2}{r} \sin\varphi \left[-\sin\varphi \, \underset{\sim}{e}_r + \cos\varphi \, \underset{\sim}{e}_\varphi \right]$

2. $T = \frac{r}{c} \ln \frac{\tan \frac{\pi}{4}}{\tan \frac{\pi}{12}} \approx 1{,}32 \frac{r}{c}$

K – KEP 1:

1) $$\vec{a}(t) = \ddot{\vec{r}} = \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{g}{10} \\ -g \end{pmatrix}$$

2) $$\vec{v}(t) = \dot{\vec{r}} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \int \ddot{x}\,dt + C_x \\ \int \ddot{y}\,dt + C_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{g}{10}t + C_x \\ -gt + C_y \end{pmatrix}$$

RB: $O(0;0)$: $$\vec{v}_0 = \vec{v}(0) = \begin{pmatrix} v_{x0} \\ v_{y0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_0 \cos\alpha \\ v_0 \sin\alpha \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} v_0 \cos\alpha \\ v_0 \sin\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cancel{-\frac{g}{10}\cdot 0} + C_x \\ \cancel{-g\cdot 0} + C_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_x \\ C_y \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \vec{v}(t) = \begin{pmatrix} -\frac{g}{10}t + v_0 \cos\alpha \\ -gt + v_0 \sin\alpha \end{pmatrix}$$

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \int \dot{x}\,dt + D_x \\ \int \dot{y}\,dt + D_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{g}{20}t^2 + v_0 t \cos\alpha + D_x \\ -\frac{g}{2}t^2 + v_0 t \sin\alpha + D_y \end{pmatrix}$$

RB: $O(0;0)$: $$\vec{r}_0 = \vec{r}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cancel{-\frac{g}{20}\cdot 0^2} + \cancel{v_0 \cdot 0 \cos\alpha} + D_x \\ \cancel{-\frac{g}{2}\cdot 0^2} + \cancel{v_0 \cdot 0 \sin\alpha} + D_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_x \\ D_y \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} -\frac{g}{20}t^2 + v_0 t \cos\alpha \\ -\frac{g}{2}t^2 + v_0 t \sin\alpha \end{pmatrix}$$

3) $\vec{r}(t_B) = \vec{b} = \begin{pmatrix} b \\ 0 \end{pmatrix}$;

$$\frac{v_0^2}{b} = \frac{10g}{9} \Rightarrow b = \frac{9v_0^2}{10g}$$

$$\Rightarrow \frac{9v_0^2}{10g} = -\frac{g}{20}t_b^2 + v_0 t_B \cos\alpha \quad (1)$$

$$0 = -\frac{g}{2}t_b^2 + v_0 t_b \sin\alpha \quad (2)$$

$$(2): \quad 0 = -\frac{g}{2}t_b + v_0 \sin\alpha \quad | \quad t_b \neq 0$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{t_b = \frac{2v_0}{g}\sin\alpha}}$$

$$\Rightarrow (1): \quad \frac{9\cancel{v_0^2}}{10\cancel{g}} = -\frac{\cancel{g}}{20} \cdot \frac{4\cancel{v_0^2}}{\cancel{g^2}}\sin^2\alpha + \cancel{v_0} \cdot \frac{2\cancel{v_0}}{\cancel{g}}\sin\alpha\cos\alpha$$

$$\Rightarrow \frac{9}{10} = -\frac{1}{5}\underbrace{\sin^2\alpha}_{\frac{\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha}} + \underbrace{2\sin\alpha\cos\alpha}_{\frac{2\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha}}$$

$$\Rightarrow \frac{9}{10} = -\frac{1}{5}\cdot\frac{\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha} + \frac{2\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha}$$

$$\Rightarrow \frac{9}{10}(1+\tan^2\alpha) = -\frac{1}{5}\tan^2\alpha + 2\tan\alpha$$

$$\Leftrightarrow 1+\tan^2\alpha = -\frac{10}{45}\tan^2\alpha + \frac{20}{9}\tan\alpha$$

$$\Rightarrow 0 = \frac{-10-45}{45}\tan^2\alpha + \frac{20}{9}\tan\alpha - 1$$

$$0 = -\frac{11}{\cancel{9}}\tan^2\alpha + \frac{20}{\cancel{9}}\tan\alpha - \cancel{1}\,9$$

$$0 = \tan^2\alpha - \frac{20}{11}\tan\alpha + \frac{9}{11}$$

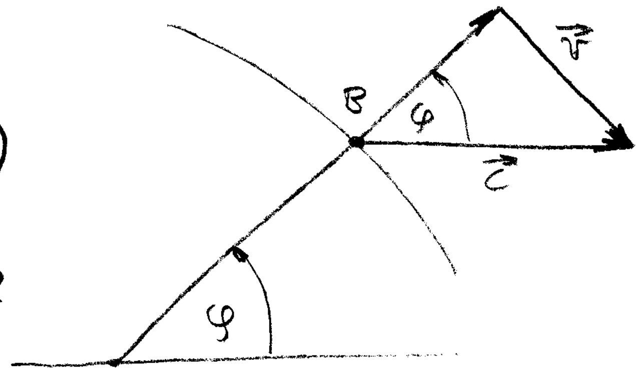
$$\Rightarrow \tan\alpha_{1/2} = \frac{10}{11} \pm \sqrt{\frac{100-99}{121}} = \frac{10 \pm 1}{11}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\alpha_1 = 45^\circ}} \; ; \; \underline{\underline{\alpha_2 = 39{,}289^\circ}}$$

k - KIP2:

1) $\vec{r} = r\cdot\vec{e}_r$

$|\vec{v}| = c\sin\varphi$



$\vec{v} = |\vec{v}|\cdot(-\vec{e}_\varphi)$

$\Rightarrow \vec{v} = -c\cdot\sin\varphi\cdot\vec{e}_\varphi$

$$\vec{a} = \dot{\vec{v}} = -c\cdot\dot\varphi\cdot\cos\varphi\cdot\vec{e}_\varphi - c\sin\varphi\cdot\dot{\vec{e}}_\varphi;\quad \dot{\vec{e}}_\varphi = -\dot\varphi\vec{e}_r$$

$$\Rightarrow \vec{a} = c\dot\varphi\left(-\cos\varphi\vec{e}_\varphi + \sin\varphi\vec{e}_r\right);$$

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \cancelto{0}{\dot r\vec{e}_r} + r\dot{\vec{e}}_r;\quad \dot{\vec{e}}_r = \dot\varphi\cdot\vec{e}_\varphi;\quad r=\text{const}\Rightarrow \dot r = 0$$

$$\Rightarrow \vec{v} = r\cdot\dot\varphi\cdot\vec{e}_\varphi \Rightarrow \dot\varphi = \frac{\vec{v}}{r\vec{e}_\varphi}$$

$$\Rightarrow \vec{a} = c\cdot\frac{(-c\sin\varphi\cdot\cancel{\vec{e}_\varphi})}{r\cdot\cancel{\vec{e}_\varphi}}\left(-\cos\varphi\vec{e}_\varphi + \sin\varphi\vec{e}_r\right)$$

$$= -c^2\cdot\frac{\sin\varphi}{r}\left(-\cos\varphi\vec{e}_\varphi + \sin\varphi\vec{e}_r\right)$$

$$\Rightarrow \vec{a} = \frac{c^2\sin\varphi}{r}\left(\cos\varphi\cdot\vec{e}_\varphi + \sin\varphi\cdot\vec{e}_r\right)$$

2) $\dot\varphi = \frac{\vec{v}}{r\vec{e}_\varphi};\quad \dot\varphi = \frac{d\varphi}{dt};\quad \vec{v} = -c\sin\varphi\cdot\vec{e}_\varphi$

$$\Rightarrow \frac{d\varphi}{dt} = -\frac{c\sin\varphi\cdot\cancel{\vec{e}_\varphi}}{r\cancel{\vec{e}_\varphi}}$$

$$\Rightarrow -\frac{r}{c}\cdot\frac{d\varphi}{\sin\varphi} = dt \Rightarrow -\frac{r}{c}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\frac{d\varphi}{\sin\varphi} = \int_0^T dt$$

$$\Rightarrow T = \left[-\frac{r}{c}\ln\left|\tan\frac{\varphi}{2}\right|\right]_{\varphi_1}^{\varphi_2};\quad \varphi_1 = \frac{\pi}{2};\quad \sin\varphi_2 = \frac{h}{r} = \frac{\frac{r}{2}}{r} = \frac{1}{2}\Rightarrow\varphi_2 = \frac{\pi}{6}$$

$$\Rightarrow T = -\frac{r}{c}\left(\ln\left|\tan\frac{\pi}{12}\right| - \ln\left|\tan\frac{\pi}{4}\right|\right) = \frac{r}{c}\left(\ln\left|\tan\frac{\pi}{4}\right| - \ln\left|\tan\frac{\pi}{12}\right|\right)$$

$$\Rightarrow T = \frac{r}{c}\left(\ln\left|\frac{\tan\frac{\pi}{4}}{\tan\frac{\pi}{12}}\right|\right) = 1{,}317\,\frac{r}{c}$$