Thema: Prinzip von d'Alembert für Massenpunkte

Ziel: Aufstellung der Bewegungsgleichungen

Methode:

a) Wahl des Koordinatensystems und allgemeine positive Lage des Massenpunktes

b) Freischneiden jedes einzelnen Massenpunktes

c) Anbringen aller eingeprägten- und Zwangskräfte

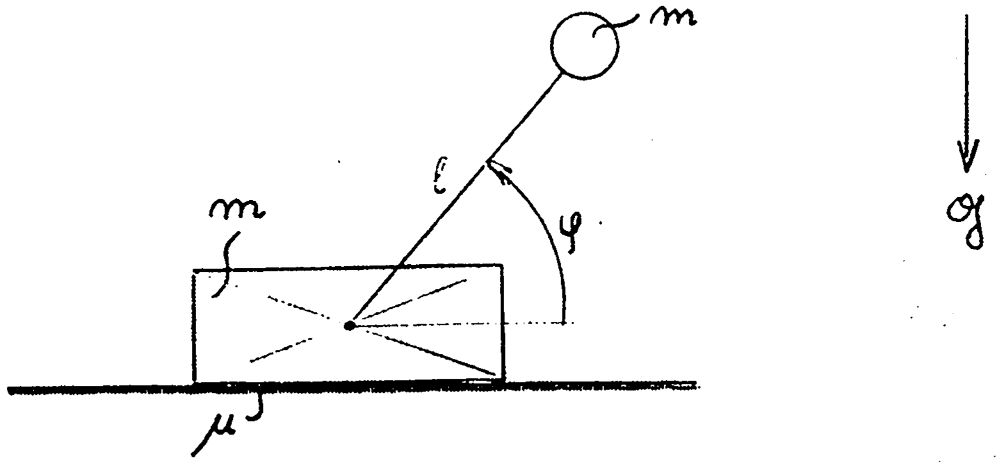
d) Anbringen der d'Alembert-Kräfte entgegen den positiven Beschleunigungsrichtungen

e) Gleichgewicht der Kräfte $\underset{\sim}{F}^* + \underset{\sim}{Z} + \underset{\sim}{T} = 0$

$\underset{\sim}{F}^*$ = eingeprägte Kräfte
$\underset{\sim}{Z}$ = Zwangskräfte
$\underset{\sim}{T}$ = d'Alembertsche Trägheitskräfte .

Aufgaben: K-DAM*

Aufgabe K-DAM 1



Ein masseloser Stab der Länge l ist an seinen Enden gelenkig mit zwei Punktmassen m verbunden, von denen eine auf horizotaler Unterlage reibend (μ) gleiten kann. Der Stab wird in die lotrechte Ruhelage gebracht und setzt sich von dort aus durch eine kleine Störung in Bewegung.

1. Mit dem Prinzip von d'Alembert stelle man Bewegungs- und Zwangskraftgleichung der oberen Punktmasse für den Fall auf, daß die untere Masse in Ruhe ist.
2. Man bestimme daraus die Stangenkraft S als Funktion von φ .
3. Wie groß muß der Haftreibungskoeffizient μ mindestens sein, wenn die untere Masse bis $\varphi_1 = 60^\circ$ in Ruhe bleiben soll?

<u>Lösung:</u>

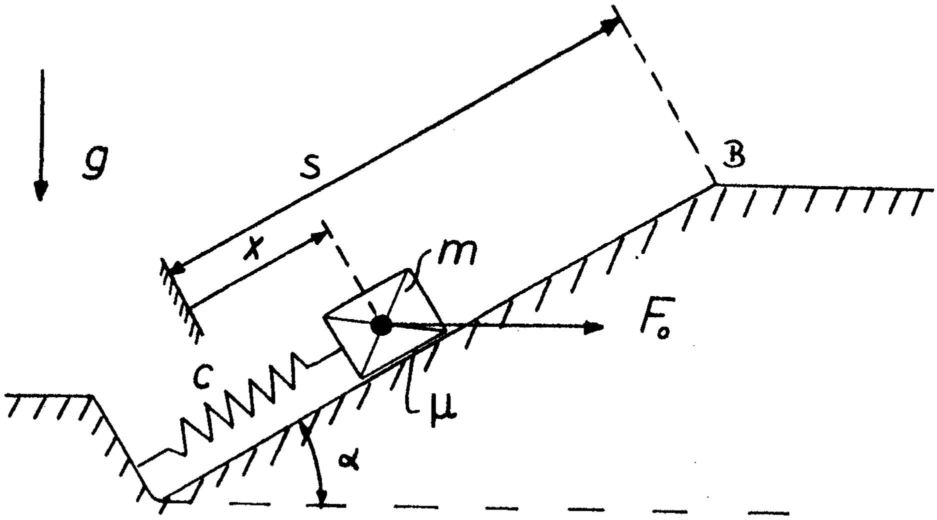
1. Zwangskraftglg.: $-mg\sin\varphi + S + m\ell\dot{\varphi}^2 = 0$ (S = Stangenkraft)

   Bewegungsglg.: $-mg\cos\varphi - m\ell\ddot{\varphi} = 0$

2. $S(\varphi) = mg\,(3\sin\varphi - 2)$

3. $\mu \geq \dfrac{(3\sin\varphi_1 - 2)\cos\varphi_1}{1 + (3\sin\varphi_1 - 2)\sin\varphi_1} = 0{,}196$

Aufgabe K-DAM 2



Ein Körper der Masse m ist über eine masselose Feder mit der Federkonstanten c an die feste Umgebung angeschlossen und wird durch eine stets horizontal gerichtete Kraft F_o im Schwerefeld eine rauhe (Reibwert μ), schiefe Ebene (Neigungswinkel α) hinaufbewegt.

1. Mit dem Prinzip von d'Alembert ermittle man die Bewegungsgleichung des Körpers in x.

2. Man bestimme die Geschwindigkeit $\dot{x}$ der Masse als Funktion der Wegkoordinate x.

3. Wie groß muß F_o sein, damit der Körper den Punkt B(x=s) erreichen kann?

Lösung: 1. $m\ddot{x} + cx = F_0(\cos\alpha - \mu\sin\alpha) - mg(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)$

2. Mit $\ddot{x} = \dot{x}\dfrac{d\dot{x}}{dx}$ erhält man:

$$\dot{x} = \sqrt{2\left[\frac{F_0}{m}(\cos\alpha - \mu\sin\alpha) - g(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)\right]x - \frac{c}{m}x^2}$$

3. $F_0 \geq \dfrac{\frac{c}{2}s + mg(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)}{\cos\alpha - \mu\sin\alpha}$

K-DAM 1:

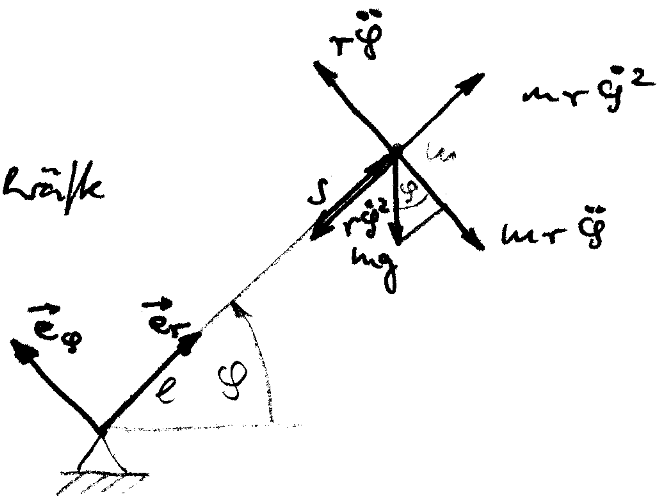
1) 1.) KS

2.) Freischnitt

3.) eingepr. u. Zwangskräfte

pos. Beschl.

4.) Trägheitskräfte



5.) Gleichgewicht:

$$\sum F_{ir} = 0 = S + m\ell\dot{\varphi}^2 - mg\sin\varphi \qquad (1)\ (\text{Zwangskr.-glg.})$$

$$\sum F_{i\varphi} = 0 = -m\ell\ddot{\varphi} - mg\cos\varphi \qquad (2)\ (\text{Bew.-glg.})$$

2) aus (2): $\ddot{\varphi} + \frac{g}{\ell}\cos\varphi = 0;$

$$\ddot{\varphi} = \frac{d\dot{\varphi}}{dt} = \frac{d\dot{\varphi}}{d\varphi}\cdot\frac{d\varphi}{dt} = \frac{d\dot{\varphi}}{d\varphi}\cdot\dot{\varphi}$$

$$\Rightarrow \frac{d\dot{\varphi}}{d\varphi}\cdot\dot{\varphi} + \frac{g}{\ell}\cos\varphi = 0$$

$$\Rightarrow \dot{\varphi}\,d\dot{\varphi} = -\frac{g}{\ell}\cos\varphi\cdot d\varphi$$

$$\Rightarrow \int\dot{\varphi}\,d\dot{\varphi} = -\frac{g}{\ell}\int\cos\varphi\cdot d\varphi$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\dot{\varphi}^2 = -\frac{g}{\ell}\sin\varphi + C$$

RB: $\dot{\varphi}(\varphi = \frac{\pi}{2}) = 0 \Rightarrow 0 = -\frac{g}{\ell}\overbrace{\sin\frac{\pi}{2}}^{=1} + C \Rightarrow C = \frac{g}{\ell}$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\dot{\varphi}^2 = -\frac{g}{\ell}\sin\varphi + \frac{g}{\ell} = \frac{g}{\ell}(1 - \sin\varphi)$$

$$\Rightarrow \underline{\dot{\varphi}^2 = \frac{2g}{\ell}(1 - \sin\varphi)}$$

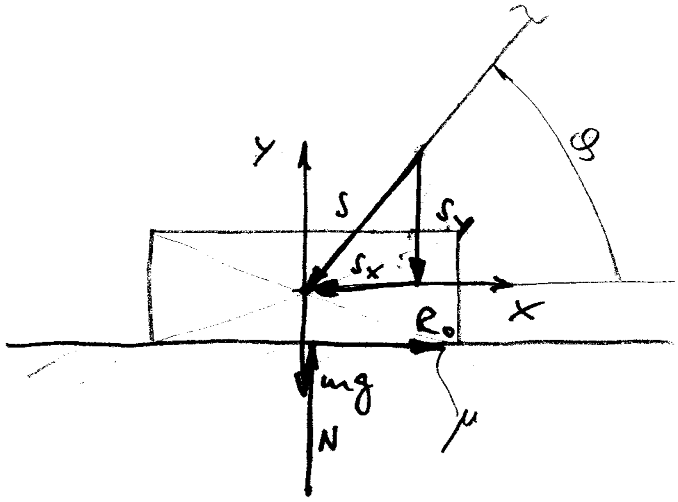
$$\Rightarrow \text{aus (1)}: \quad 0 = S + \frac{m\cancel{\ell}\cdot 2g}{\cancel{\ell}}(1 - \sin\varphi) - mg\sin\varphi$$

$$= S + mg(2 - 2\sin\varphi - \sin\varphi)$$

$$= S + mg(2 - 3\sin\varphi)$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{S = mg(3\sin\varphi - 2)}}$$

3)



$$\sum F_x = 0 = R_0 - S_x \qquad (1)$$

$$\sum F_y = 0 = N - mg - S_y \qquad (2)$$

$$(1)\quad R_0 = S_x = S\cos\varphi$$

$$(2)\quad N = mg + S_y = mg + S\sin\varphi$$

$$\mu N \overset{!}{\geq} R_0 \Rightarrow N \geq \frac{R_0}{\mu} = \frac{S\cos\varphi}{\mu}$$

$$\frac{S\cos\varphi}{\mu} \leq mg + S\sin\varphi$$

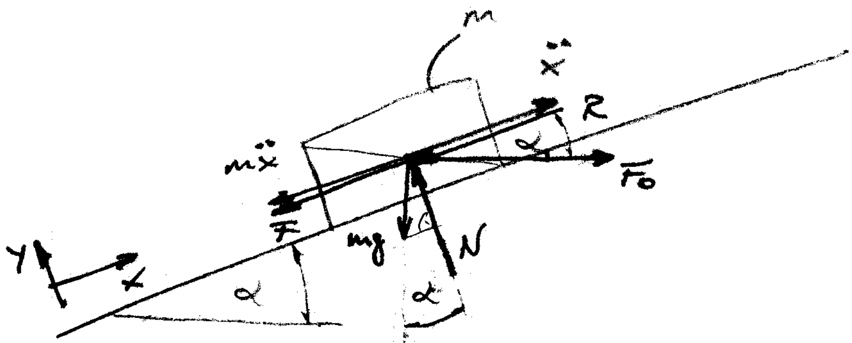
$$\Rightarrow \mu \geq \frac{S\cos\varphi}{mg + S\sin\varphi} \quad ; \quad S = mg(3\sin\varphi - 2)$$

$$\Rightarrow \mu \geq \frac{\cancel{mg}(3\sin\varphi - 2)\cos\varphi}{\cancel{mg}(1 + (3\sin\varphi - 2)\sin\varphi)} = \frac{(3\sin\varphi - 2)\cos\varphi}{1 + (3\sin\varphi - 2)\sin\varphi}$$

$$\Rightarrow \mu \geq \frac{(3\sin 60^\circ - 2)\cos 60^\circ}{1 + (3\sin 60^\circ - 2)\sin 60^\circ} = \underline{\underline{0{,}137}}$$

K-DAM 2:

1)



$$\sum F_x = 0 = -F - m\ddot{x} - R - mg\sin\alpha + F_0\cos\alpha \qquad (1)$$

$$\sum F_y = 0 = -mg\cos\alpha + N - F_0\sin\alpha \qquad (2)$$

(2): $N = mg\cos\alpha + F_0\sin\alpha\,; \quad R = \mu N\,; \quad F = Cx$

$\Rightarrow R = mg\mu\cos\alpha + F_0\mu\sin\alpha$

$\Rightarrow (1): \; 0 = -Cx - m\ddot{x} - mg\mu\cos\alpha - F_0\mu\sin\alpha - mg\sin\alpha + F_0\cos\alpha \;\Big|\,(-1)$

$\Rightarrow$ BGL: $\underline{\underline{0 = Cx + m\ddot{x} + mg(\mu\cos\alpha + \sin\alpha) + F_0(\mu\sin\alpha - \cos\alpha)}}$

2) aus BGL: $\ddot{x} = -\frac{C}{m}x - g(\mu\cos\alpha + \sin\alpha) - \frac{F_0}{m}(\mu\sin\alpha - \cos\alpha)\,;$

$$\ddot{x} = \frac{d\dot{x}}{dt} = \frac{d\dot{x}}{dx}\cdot\frac{dx}{dt} = \frac{d\dot{x}}{dx}\cdot\dot{x}$$

$$\Rightarrow \dot{x}\cdot d\dot{x} = \left(-\frac{C}{m}x - g(\mu\cos\alpha + \sin\alpha) + \frac{F_0}{m}(\cos\alpha - \mu\sin\alpha)\right)dx$$

$$\Rightarrow \int \dot{x}\cdot d\dot{x} = \int\left(\frac{F_0}{m}(\cos\alpha - \mu\sin\alpha) - g(\mu\cos\alpha + \sin\alpha) - \frac{C}{m}x\right)dx$$

$$\Rightarrow \frac{\dot{x}^2}{2} = \left(\frac{F_0}{m}(\cos\alpha - \mu\sin\alpha) - g(\mu\cos\alpha + \sin\alpha)\right)x - \frac{C}{2m}x^2 + k\,;$$

AB: $\dot{x}(x=0) = 0 \Rightarrow k = -(\ldots\ldots)\cdot 0 + \frac{C}{2m}\cdot 0^2 \,\underline{= 0}$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\dot{x} = \sqrt{2\left(\frac{F_0}{m}(\cos\alpha - \mu\sin\alpha) - g(\mu\cos\alpha + \sin\alpha)\right)x - \frac{C}{m}x^2}}}$$

3) $\dot{x}(x=s) = 0$

$$\Rightarrow 0 = \sqrt{2\left(\frac{F_0}{m}(\cos\alpha - \mu\sin\alpha) - g(\mu\cos\alpha + \sin\alpha)\right)s - \frac{C}{m}s^2}$$

$$\Rightarrow \frac{\cancel{2}F_0}{\cancel{m}}(\cos\alpha - \mu\sin\alpha)\cancel{s} = \frac{C}{\cancel{m}\,2}s^{\cancel{2}} + \cancel{2}g\,m(\mu\cos\alpha + \sin\alpha)\cancel{s}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{F_0 = \frac{\frac{C}{2}s + mg(\mu\cos\alpha + \sin\alpha)}{\cos\alpha - \mu\sin\alpha}}}$$