Fachhochschule Mannheim Fachbereich Maschinenbau Prof. Dr.-Ing. H. Bräutigam	**Formelsammlung**	**Technische Mechanik** **Kinetik** Blatt K3

Thema: Arbeit und Leistung, Arbeitssatz

Formelsammlung:

1. Arbeit: $W = \int_{\underset{\sim}{r}_o}^{\underset{\sim}{r}_1} \underset{\sim}{F} \cdot d\underset{\sim}{r}$

2. Leistung: $P = \frac{dW}{dt} = \underset{\sim}{F} \cdot \underset{\sim}{v}$, $\underset{\sim}{v}$ = Geschwindigkeit

3. Wirkungsgrad: $\eta = P_{ab}/P_{zu}$

4. Arbeitssatz:

Aus dem Newtonschen Grundgesetz $\underset{\sim}{F} = m\,\underset{\sim}{a}$ findet man ein 1. Integral, den Arbeitssatz:

$$\boxed{W = T_1 - T_o}$$

W = Arbeit aller äußeren (eingeprägten) Kräfte zwischen "0" (Anfangslage und "1" ([allgemeine] Endlage)

$T_1 - T_o$ = Differenz der kinet. Energieen mit $T = \frac{m}{2}v^2$
(m=Masse, v=Geschwindigkeit)

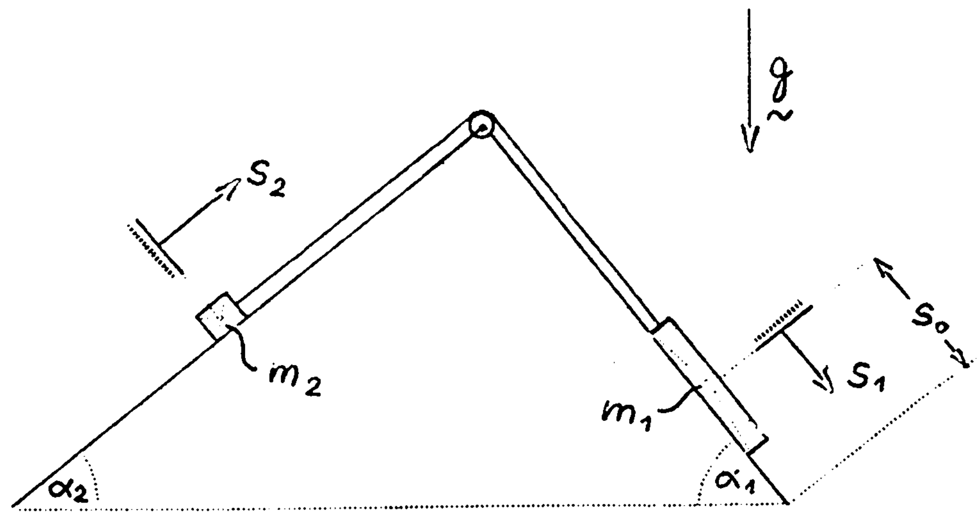
Ergebnis: (Winkel-) Geschwindigkeit als Funktion des (Winkel-) Weges,
d.h. zeitfreie Funktion $\dot{q} = f(q)$.

Anmerkung:

1. Zwangskräfte leisten keine Arbeit
2. Eingeprägte Kräfte sind z.B. Schwerkraft, Federkraft, Dämpfung, Reibung, Antrieb.
3. Skalare Auswertung der Arbeit: $W = \int_{r_o}^{r_1} |\underset{\sim}{F}|\,|d\underset{\sim}{r}| \cos\alpha$
mit α = Winkel zwischen $\underset{\sim}{F}$ und $d\underset{\sim}{r}$.

Aufgaben: K-ASM*

Aufgabe K-ASM 1



Zwei Massen m_1 und $m_2 = m_1/4$ sind durch ein masseloses, undehnbares Seil, das über eine masselose, reibungsfrei drehbar gelagerte Rolle geführt wird, miteinander verbunden. Der Reibungskoeffizient zwischen den Massen und der schiefen Ebene sei μ. Die Massen m_1 und m_2 befinden sich anfangs für $s_1 = s_2 = 0$ in Ruhe und werden sodann losgelassen.

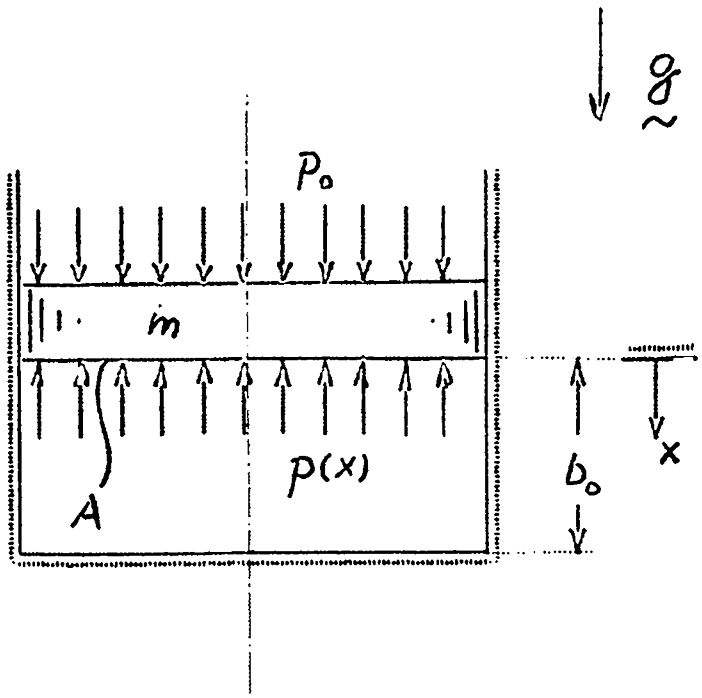
1. Man berechne die Arbeit W der am System angreifenden eingeprägten Kräfte für eine Lageänderung $s_1 = 0$ bis s_1.

2. Mit dem Arbeitssatz bestimme man die Geschwindigkeit v_0 von m_1 an der Stelle $s_1 = s_0$.

<u>Lösung:</u> 1. $W(s_1) = m_1 \cdot g \cdot s_1 \left[\sin\alpha_1 - \mu\cos\alpha_1 - \frac{1}{4}(\sin\alpha_2 + \mu\cos\alpha_2)\right]$

2. $v_0 = \sqrt{\frac{8}{5} g s_0 \left[\sin\alpha_1 - \mu\cos\alpha_1 - \frac{1}{4}(\sin\alpha_2 + \mu\cos\alpha_2)\right]}$

Aufgabe K-ASM 2



Ein Kolben der Masse m und der Querschnittsfläche A wird im Abstand b_o vom Zylinderboden ohne Anfangsgeschwindigkeit losgelassen. Während seiner Abwärtsbewegung ändert sich der Druck im Zylinder nach dem Gesetz $p(x) = p_o \frac{b_o}{b_o - x}$. Zwischen Zylinderwand und Kolben herrsche <u>keine</u> Reibung.

1. Man berechne die Arbeit W der am Kolben angreifenden eingeprägten Kräfte für eine Lageänderung x = 0 bis x.

2. Mit dem Arbeitssatz berechne man die Kolbengeschwindigkeit v in Abhängigkeit des Kolbenweges x.

3. Man ermittle die maximale Kolbengeschwindigkeit v_{max}.

4. Mit den Zahlenwerten $p_o = 9{,}81\ N/cm^2$, $b_o = 200$ cm, $A = 600\ cm^2$, $m = 400$ kg, $g = 9{,}81\ m/s^2$ berechne man die maximale Kolbengeschwindigkeit v_{max} und die Stelle x_m, an der sie auftritt.

<u>Lösung:</u>

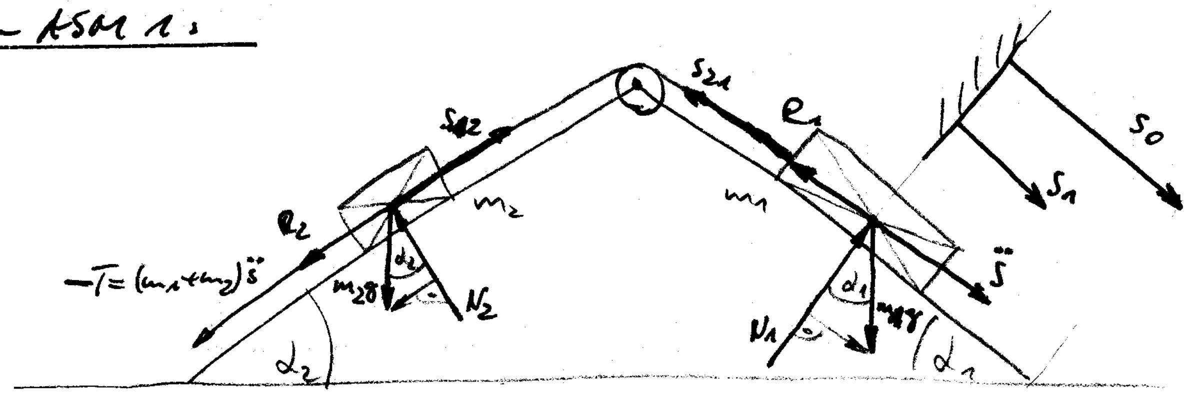
1. $W(x) = x\,(p_o \cdot A + mg) + p_o A\, b_o \cdot \ln \frac{b_o - x}{b_o}$

2. $v(x) = \sqrt{\frac{2}{m}\left[(p_o A + mg)\,x + p_o A\, b_o \cdot \ln \frac{b_o - x}{b_o}\right]}$

3. $v_{max} = \sqrt{\frac{2 b_o}{m}\left[mg - p_o \cdot A \cdot \ln\left(1 + \frac{mg}{p_o A}\right)\right]}$

4. $x_m = \frac{mg \cdot b_o}{p_o A + mg}$; $x_m = 80$ cm , $v_{max} = 3{,}02$ m/s

K-ASM 1:



1) $$\sum F_S = 0 = T - R_2 - m_2 g \sin\alpha_2 + S_{12} - S_{21} - R_1 + m_1 g \sin\alpha_1 \qquad (1)$$

$$\sum F_\perp = 0 = -m_2 g \cos\alpha_2 + N_2 + N_1 - m_1 g \cos\alpha_1 \qquad (2)$$

$$(2): N_1 + N_2 = m_2 g \cos\alpha_2 + m_1 g \cos\alpha_1 \; ; \quad m_2 = \frac{m_1}{4} \; ;$$

$$R_i = \mu N_i \Rightarrow R_1 + R_2 = \mu (N_1 + N_2)$$

$$\Rightarrow R_1 + R_2 = \mu m_1 g \left(\frac{1}{4}\cos\alpha_2 + \cos\alpha_1\right);$$

$$S_{12} = S_{21} \Rightarrow S_{12} - S_{21} = 0$$

$$\Rightarrow (1): 0 = T - \mu m_1 g \left(\frac{1}{4}\cos\alpha_2 + \cos\alpha_1\right) + m_1 g \left(-\frac{1}{4}\sin\alpha_2 + \sin\alpha_1\right);$$

$$F = -T$$

$$\Rightarrow F = m_1 g \left(\sin\alpha_1 - \mu\cos\alpha_1 - \frac{1}{4}\left(\sin\alpha_2 + \mu\cos\alpha_2\right)\right)$$

$$W = \int_0^{s_1} F\,ds = F\int_0^{s_1} ds = \left[F\cdot s\right]_0^{s_1} = F\cdot s_1$$

$$\underline{\underline{\Rightarrow W = m_1 g s_1 \left(\sin\alpha_1 - \mu\cos\alpha_1 - \frac{1}{4}\left(\sin\alpha_2 + \mu\cos\alpha_2\right)\right)}}$$

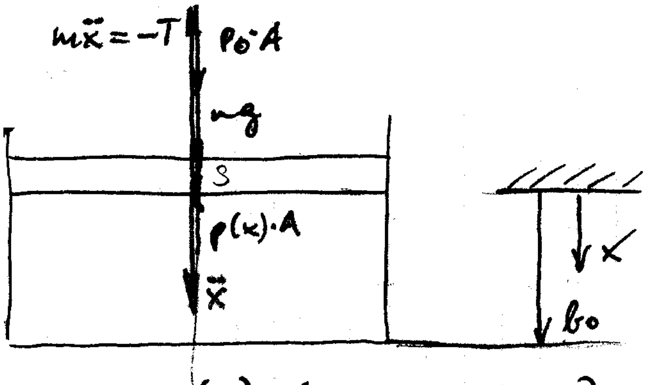
2) $$W = W_{kin\,0} - W_{kin\,1} \; ; \quad W_{kin\,1} = 0 \Rightarrow W = W_{kin\,0} = \frac{m}{2} v_0^2$$

$$m = m_1 + m_2 = m_1 + \frac{m_1}{4} = \frac{5}{4} m_1 \Rightarrow \frac{m}{2} = \frac{5}{8} m_1$$

$$\Rightarrow v_0 = \sqrt{\frac{8W}{5m_1}} \; ; \quad s_1 = s_0$$

$$\underline{\underline{\Rightarrow v_0 = \sqrt{\frac{8}{5} g s_0 \left(\sin\alpha_1 - \mu\cos\alpha_1 - \frac{1}{4}\left(\sin\alpha_2 + \mu\cos\alpha_2\right)\right)}}}$$

K-ASM 2:



1) $$\underline{\sum F_x = 0 = T + p_0 \cdot A + mg - p(x)\cdot A} \qquad (1)$$

$$T = -F$$

$$\Rightarrow F = -p(x)\cdot A + p_0 \cdot A + mg = p_0 \cdot A + mg - p_0 \cdot A \frac{b_0}{b_0 - x}$$

$$\Rightarrow F = p_0 A \left(1 - \frac{b_0}{b_0 - x}\right) + mg = mg - p_0 A \frac{x}{b_0 - x}$$

$$W = \int_0^x F \, d\tilde{x} = \int_0^x \left[mg - \frac{p_0 A \cdot \tilde{x}}{b_0 - \tilde{x}}\right] d\tilde{x} = \Big[mg\tilde{x} - p_0 \cdot A\left(-\tilde{x} - b_0 \cdot \ln|b_0 - \tilde{x}|\right)\Big]_0^x$$

$$W = \left[mg x - mg \cdot 0\right] - p_0 \cdot A \Big[\left(-x - b_0 \ln|b_0 - x|\right) - \left(0 - b_0 \ln|b_0 - 0|\right)\Big]$$

$$W = mgx + p_0 \cdot A \left(b_0 \ln\left|\frac{b_0 - x}{b_0}\right| + x\right)$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{W(x) = (mg + p_0 \cdot A)\, x + p_0 \cdot A \cdot b_0 \ln\left|\frac{b_0 - x}{b_0}\right|}}$$

2) $$W(x) = E_{kin}(x) - E_{kin}(0) \; ; \quad E_{kin}(0) = 0$$

$$\Rightarrow W(x) = E_{kin}(x) = \frac{1}{2} m v^2(x)$$

$$\Rightarrow v(x) = \sqrt{\frac{2W(x)}{m}}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{v(x) = \sqrt{\frac{2}{m}\left[(mg + p_0 A)\, x + p_0 A \cdot b_0 \ln\left|\frac{b_0 - x}{b_0}\right|\right]}}}$$

3) $v_{max} = v(x_m) = v(\ddot{x} = 0)$

mit (1): $0 = -m\ddot{x} + p_0 A + mg - p_0 A \frac{b_0}{b_0 - x}$; $\ddot{x} \stackrel{!}{=} 0$

$$\Rightarrow 0 = p_0 A + mg - p_0 A \frac{b_0}{b_0 - x_m}$$

$$\Rightarrow \cancel{p_0 A} \frac{b_0}{b_0 - x_m} = \overset{1}{\cancel{p_0 A}} + \frac{mg}{p_0 A}$$

$$\Rightarrow \frac{b_0}{1 + \frac{mg}{p_0 A}} = b_0 - x_m$$

$$\Rightarrow x_m = b_0 \left(1 - \frac{1}{1 + \frac{mg}{p_0 A}}\right) = b_0 \left(1 - \frac{p_0 A}{p_0 A + mg}\right)$$

$$x_m = b_0 \left(\frac{\cancel{p_0 A} + mg \cancel{- p_0 A}}{p_0 A + mg}\right) = \underline{\underline{\frac{b_0 \cdot mg}{p_0 A + mg}}}$$

$$\Rightarrow v_{max} = \sqrt{\frac{2}{m}\left[\cancel{(mg + p_0 A)} \frac{b_0 \cdot mg}{\cancel{(p_0 A + mg)}} + p_0 A \cdot b_0 \ln \left| \frac{\cancel{b_0}\left(1 - \frac{mg}{p_0 A + mg}\right)}{\cancel{b_0}} \right| \right]}$$

$$v_{max} = \sqrt{\frac{2}{m}\left[b_0 mg + p_0 A \cdot b_0 \ln \left| \frac{p_0 A \cancel{+ mg} \cancel{- mg}}{p_0 A + mg} \right| \right]}$$

$$\Rightarrow v_{max} = \underline{\underline{\sqrt{\frac{2}{m}\left[b_0 mg - p_0 A \cdot b_0 \ln \left| 1 + \frac{mg}{p_0 A} \right| \right]}}}$$

4) $$v_{max} = \sqrt{\frac{2 \cdot 2m}{400 \cancel{kg}}\left[400 \cancel{kg} \cdot 9{,}81 \frac{m}{s^2} - 9{,}81 \frac{\cancel{N}}{\cancel{10^{-4} m^2}} \frac{kg \cdot m}{s^2} \cdot 600 \cdot \cancel{10^{-4} m^2} \cdot \ln \left| 1 + \frac{400 \cdot \cancel{9{,}81 N}}{\cancel{9{,}81} \cdot 600 \cancel{N}} \right| \right]}$$

$$\underline{\underline{v_{max} = 3{,}029 \frac{m}{s}}}$$

$$x_{max} = \frac{b_0 \cdot mg}{p_0 A + mg} = \frac{2m \cdot 400 \cancel{kg} \cdot \cancel{9{,}81 m}}{(\cancel{9{,}81} \cdot 600 + 400 \cdot \cancel{9{,}81})\cancel{N} / \cancel{s^2}} = 0{,}8\,m = \underline{\underline{80\,cm}}$$