Thema: Potential, Energiesatz

Formelsammlung:

1. Potentiale

a.) Schwerepotential:

Beliebige Wahl des Nullniveaus und der positiven Koordinate

$V = mgz \;\uparrow z$ $\qquad\qquad$ $V = -\,mgz \;\downarrow z$

Ergebnis: "Oberhalb" des Nullniveaus ist V positiv, "unterhalb" des Nullniveaus negativ!

b.) Federpotential

Dehnfeder: $V = \frac{c}{2}x^2$ $\qquad$ c = Dehnfederkonst., x = Federauslenkung

Drehfeder: $V = \frac{c_d}{2}\varphi^2$ $\qquad$ c_d = Drehfederkonst., φ = Federauslenkung,

Nullniveau also hier für $x = \varphi = 0$, d.h. Potential Null für vollk.entsp. Feder, Federpotentiale stets positiv!

c.Gravitationspotential

$V = -k\frac{Mm}{r}$, k = Grav. konst.; m, M = gravit.Massen, r = Abstand der Massen, Nullniveau also für $r \to \infty$ (so am zweckmäßigsten)

2.Energiesatz:

Sind alle Kräfte konservativ, d.h. besitzen sie ein Potential, dann entsteht aus dem Arbeitssatz der Energiesatz $\boxed{T_o + V_o = T_1 + V_1}$

d.h. Summe aus kin. Energie T und pot. Energie ist zu jedem Zeitpunkt konstant.

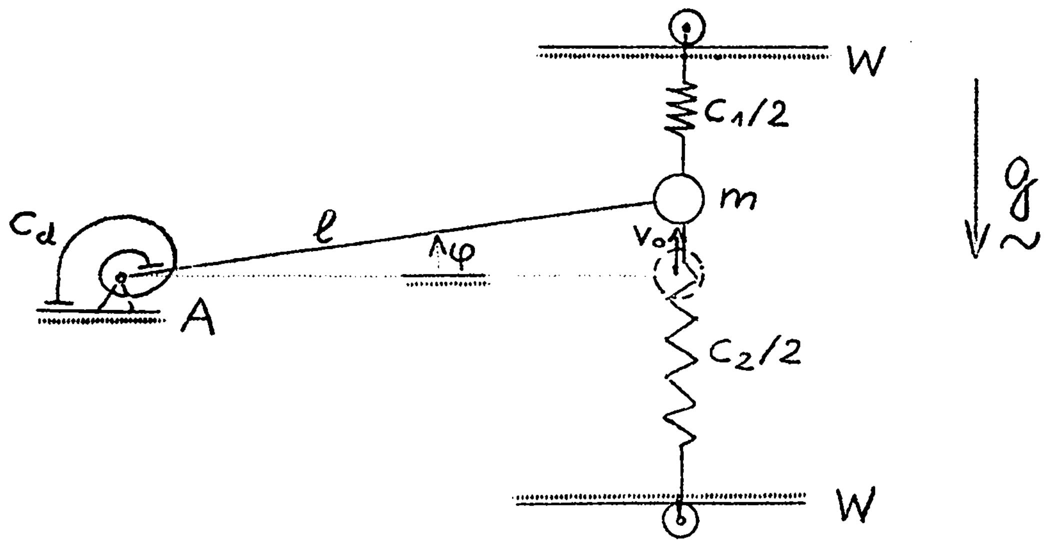
Wie der Arbeitssatz liefert auch der Energiesatz zeitfreie Fkt. $\dot{q} = f(q)$.

3. Ersatzfederkonstanten

Parallelschaltung: $c_{Res} = \sum_i c_i$, $\qquad$ Reihenschaltung: $\frac{1}{c_{Res}} = \sum \frac{1}{c_i}$.

Aufgaben: K-ESM*

Aufgabe K-ESM 2



Am Ende einer um A reibungsfrei drehbar gelagerten masselosen Stange der Länge l befindet sich ein Massenpunkt der Masse m. Die Bewegung des Pendels im Schwerefeld wird durch eine masselose Drehfeder c_d und zwei masselose Schraubenfedern $c_1/2$, $c_2/2$ in der skizzierten Weise beeinflußt. Die Schraubenfedern sind an ihren Enden durch kleine, masselose Rollen an den Wänden W abgestützt, so daß sie stets vertikale Kräfte auf die Punktmasse ausüben. In der Anfangslage $\varphi = 0$ sind sämtliche Federn spannungslos.

1. In allgemeiner Lage $\varphi \neq 0$ bestimme man das Potential $V(\varphi)$.

2. Mit dem Energiesatz ermittle man die Bahngeschwindigkeit $v(\varphi)$, wenn der Massenpunkt bei $\varphi = 0$ die Geschwindigkeit v_0 besaß.

3. Wie groß muß v_0 sein, wenn $v(\varphi = 30^\circ)$ gerade verschwinden soll? Es sei hier speziell $c_1 = c_2 = c$.

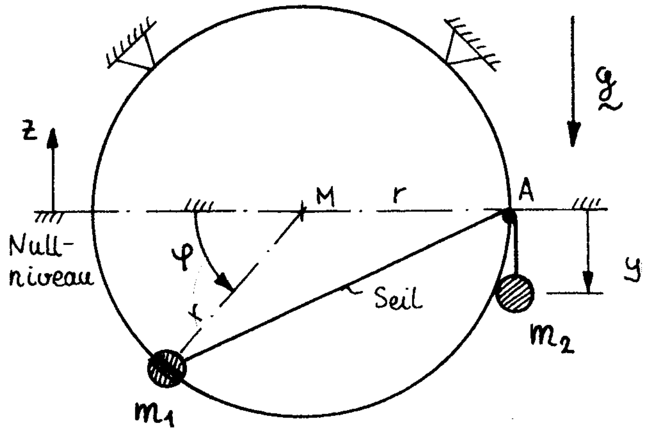
Lösung: 1. $V(\varphi) = mgl\sin\varphi + \frac{c_d}{2}\varphi^2 + \frac{c_1+c_2}{4}(l\cdot\sin\varphi)^2$

2. $v(\varphi) = \sqrt{v_0^2 - 2gl\sin\varphi - \frac{c_d}{m}\varphi^2 - \frac{c_1+c_2}{2m}(l\cdot\sin\varphi)^2}$

3. $v_0 = \sqrt{g\cdot l + \frac{1}{m}\left[c_d\frac{\pi^2}{36} + c\frac{l^2}{4}\right]}$

Aufgabe K-ESM 4 (Abschlußklausur WS 94/95)

Zwei **Massenpunkte m_1 und m_2** sind über ein masseloses, undehnbares Seil der Länge 2r miteinander verbunden, das über die Umlenkrolle A läuft. Der Massenpunkt m_1 kann sich unbehindert auf dem festen Kreisring (Radius r) bewegen. Das System wird aus der Anfangslage $\varphi=y=0$ ohne Anfangsgeschwindigkeit losgelassen. Alle Vorgänge verlaufen reibungsfrei.



1. Man finde den **geometrischen Zusammenhang** von y und φ und daraus $\dot{y}(\varphi,\dot{\varphi})$.

2. Mit dem Energiesatz berechne man die **Winkelgeschwindigkeit** $\dot{\varphi}(\varphi)$.

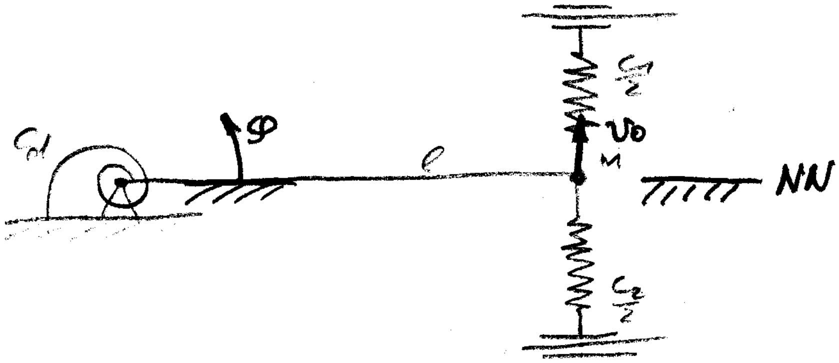
3. Wie muß das **Massenverhältnis m_2/m_1** gewählt werden, damit m_1 die Lage $\varphi=240°$ gerade erreicht.

Lösung: 1. $y = 2r\left(1-\cos\frac{\varphi}{2}\right)$, $\dot{y} = r\dot{\varphi}\sin\frac{\varphi}{2}$.

2. $$\dot{\varphi}(\varphi) = \sqrt{\frac{2g}{r}\cdot\frac{m_1\sin\varphi + 2m_2\left(1-\cos\frac{\varphi}{2}\right)}{m_1 + m_2\sin^2\frac{\varphi}{2}}}$$

3. $$\frac{m_2}{m_1} = \frac{\sqrt{3}}{6}$$

K-ESM2:



$h(\varphi) = \ell \sin\varphi$

1) $V(\varphi) = mg\,h(\varphi) + \frac{1}{2}\left(\frac{c_1}{2} + \frac{c_2}{2}\right) h(\varphi)^2 + \frac{1}{2} c_d \varphi^2$

$$\Rightarrow \underline{\underline{V(\varphi) = mg\ell\sin\varphi + \frac{1}{4}(c_1 + c_2)\ell^2 \sin^2\varphi + \frac{1}{2} c_d \varphi^2}}$$

2) $T_0 + V_0 = T + V;\quad T_0 = T(0) = \frac{m}{2} v_0^2;\quad T(\varphi) = \frac{m}{2} v(\varphi)^2;$

$V_0 = V(0) = 0$

$$\Rightarrow \frac{\cancel{m}}{\cancel{2}} v_0^2 = \overset{2}{\cancel{m}}\, g\ell\sin\varphi + \frac{1}{\underset{2}{\cancel{4}}}(c_1 + c_2)\frac{\ell^2}{m}\sin^2\varphi + \frac{1}{\cancel{2}m} c_d \varphi^2 + \frac{\cancel{m}}{\cancel{2}} v(\varphi)^2$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{v(\varphi) = \sqrt{v_0^2 - 2g\ell\sin\varphi - \frac{c_1 + c_2}{2m}\ell^2\sin^2\varphi - \frac{c_d}{m}\varphi^2}}}$$

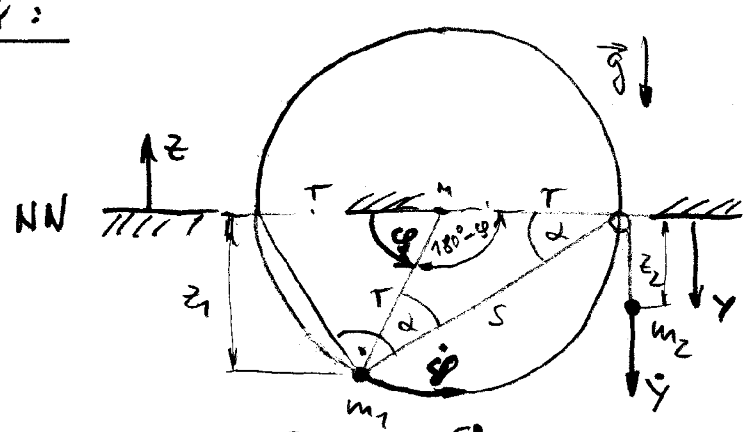
3) $30^\circ \mathrel{\hat{=}} \frac{\pi}{6}$

$$v_0 = \sqrt{2g\ell\sin\varphi + \frac{c_1 + c_2}{2m}\ell^2\sin^2\varphi + \frac{c_d}{m}\varphi^2 + v(\varphi)^2}$$

$$\Rightarrow v_0 = \sqrt{2g\ell\underbrace{\sin\frac{\pi}{6}}_{=\frac{1}{2}} + \frac{\cancel{2}c}{\cancel{2}m}\ell^2\underbrace{\sin^2\frac{\pi}{6}}_{=\left(\frac{1}{2}\right)^2} + \frac{c_d}{m}\cdot\frac{\pi^2}{36} + \underbrace{v\left(\frac{\pi}{6}\right)^2}_{\stackrel{!}{=}0}}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{v_0 = \sqrt{g\ell + \frac{c\ell^2}{4m} + \frac{c_d\cdot\pi^2}{36m}}}}$$

K-ESM4:



$$2\alpha + \cancel{180^\circ} - \varphi = \cancel{180^\circ}$$
$$\Rightarrow \quad 2\alpha = \varphi$$
$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{\alpha = \frac{\varphi}{2}}}$$

1) $y = 2r - s = 2r - 2r\cos\frac{\varphi}{2}$

$\Rightarrow \underline{\underline{y = 2r\left(1-\cos\frac{\varphi}{2}\right)}}$

$\Rightarrow \dot{y} = \left(2r\left(1-\cos\frac{\varphi}{2}\right)\right)^{\cdot} = \cancel{2}r\left(\sin\frac{\varphi}{2}\right)\cdot\frac{1}{\cancel{2}}\dot{\varphi}$

$\Rightarrow \underline{\underline{\dot{y} = \dot{\varphi} r\left(\sin\frac{\varphi}{2}\right)}}$

2) $V(\varphi) = m_1 g z_1(\varphi) + m_2 g z_2(\varphi)$; $z_2(\varphi) = -y = 2r\left(\cos\frac{\varphi}{2}-1\right)$;

$z_1(\varphi) = -r\sin\varphi$

$\Rightarrow \underline{\underline{V(\varphi) = -m_1 g r\sin\varphi + 2m_2 g r\left(\cos\frac{\varphi}{2}-1\right)}}$

$T_0 + V_0 = T + V$; $T_0 = \frac{m_1+m_2}{2}v_0^2$; $v_0 = 0 \Rightarrow T_0 = 0$

$V_0 = V(0) = 0$; $T = \frac{m_1+m_2}{2}v^2(\varphi)$; $v(\varphi) = \dot{y} = r\dot{\varphi}\left(\sin\frac{\varphi}{2}\right)$

$\Rightarrow 0 = \frac{m_1+m_2}{2}r^2\dot{\varphi}^2\left(\sin\frac{\varphi}{2}\right)^2 - m_1 g r\sin\varphi + 2m_2 g r\left(\cos\frac{\varphi}{2}-1\right)$

$\Rightarrow \dot{\varphi}(\varphi) = \sqrt{\frac{2m_1 g\cancel{r}\sin\varphi - \cancel{2}^{4}m_2 g\cancel{r}\left(\cos\frac{\varphi}{2}-1\right)}{\frac{(m_1+m_2)}{\cancel{2}}r^{\cancel{2}}\left(\sin\frac{\varphi}{2}\right)^2}}$

$\Rightarrow \underline{\underline{\dot{\varphi}(\varphi) = \sqrt{\frac{2g\left(m_1\sin\varphi - 2m_2\left(\cos\frac{\varphi}{2}-1\right)\right)}{r(m_1+m_2)\sin^2\frac{\varphi}{2}}}}}$

3) $\dot{\varphi}(\varphi = 240^\circ) = \dot{\varphi}\left(\varphi = \frac{4\pi}{3}\right) \stackrel{!}{=} 0$

$\Rightarrow 0 = \frac{2g\left(m_1\sin\frac{4\pi}{3} - 2m_2\left(\cos\frac{2\pi}{3}-1\right)\right)}{r(m_1+m_2)\sin^2\frac{2\pi}{3}}$

$\Rightarrow m_1\underbrace{\sin\frac{4\pi}{3}} = 2m_2\underbrace{\left(\cos\frac{2\pi}{3}-1\right)}$

$\Rightarrow m_1\cdot\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2m_2\left(-\frac{1}{2}-1\right) = -3m_2$

$\Rightarrow \underline{\underline{\frac{m_2}{m_1} = \frac{\sqrt{3}}{6}}}$